Программа коллоквиума.

16 декабря 2013 г.

Коллоквиум состоится в пятницу 20 декабря. В билете будет 2 теоретических вопроса и 1 задача из списка, приведенного ниже. Полный ответ на теоретический вопрос и полное решение каждой задачи оценивается в 4 балла.

1 Теоретические вопросы

1. Дайте определения представления группы, гомоморфизма представлений, подпредставления, фактор-представления, неприводимого представления. Приведите примеры приводимых, но не вполне приводимых представлений групп.
2. Сформулируйте и докажите лемму Шура.
3. Сформулируйте и докажите теорему Машке о полной приводимости.
4. Дайте определения характера представления группы и докажите его аддитивные и мультипликативные свойства. Докажите, что характер постоянен на классах сопряженности группы.
5. Сформулируйте и докажите теорему ортогональности для матричных элементов неприводимых представлений.
6. Докажите, что характеры неприводимых представлений конечной группы образуют ортонормированный базис в пространстве функций на группе, постоянных на классах сопряженности.
7. Дайте определения регулярного представления. Докажите, что над $\mathbb{C}$ регулярное представление раскладывается в прямую сумму всех неприводимых представлений с кратностями, равным размерностям соответствующих наприводимых представлений.
8. Докажите, что сумма квадратов размерностей неприводимых комплексных представлений конечной группы равна порядку этой группы.
9. Докажите, что количество неприводимых комплексных представлений конечной группы равно количеству классов сопряженности в этой группе.
10. Дайте определения полупростой алгебры. Приведите примеры полупростых алгебр и их представлений. Докажите, что всякая полупростая алгебра является прямой суммой простых.
11. Сформулируйте и докажите теорему плотности.
12. Выведите из теоремы плотности теорему Бернсайда: всякое комплексное неприводимое представление ассоциативной алгебры сюръективно.

13. Пользуясь теоремой плотности и леммой Шура, докажите, что всякая простая алгебра есть матричная алгебра над телом (т.е. над алгеброй с делением).

14. Опишите все тела (т.е. алгебры с делением) над полем вещественных чисел.

15. Докажите, что комплексная групповая алгебра конечной группы есть прямая сумма матричных алгебр.

16. Дайте определение индуцированного представления. Сформулируйте и докажите двойственность Фробениуса.

17. Выпишите и докажите формулу для характера индуцированного представления.

2 Задачи к коллоквиуму

1. Докажите, что у всякой неабелевой конечной группы существует неодномерное неприводимое комплексное представление.

2. Группа G действует на множестве X. Докажите, что характер представления группы G в пространстве $V = \mathbb{C}[X]$ дается формулой $\chi_V(g) = |X^g|$, где $|X^g|$ – количество неподвижных точек действия элемента $g \in G$ на множестве X.

3. **а)** Докажите, что если U и V – неприводимые комплексные представления групп G и H соответственно, то $U \otimes V$ – неприводимое представление группы $G \times H$. **б)** Верно ли это для вещественных неприводимых представлений?

4. Какие значения может принимать скалярный квадрат вещественного неприводимого представления конечной группы?

5. Докажите, что алгебра комплексных $n \times n$-матриц порождена некоторыми двумя своими элементами.

6. Докажите, что характер комплексного представления группы вещественен тогда и только тогда, когда на этом представлении есть невырожденная инвариантная билинейная форма.

7. Докажите, что всякое представление группы S_n самодвойственно.

8. Докажите, что всякое неприводимое представление группы $\mathbb{Z}_p \ltimes \mathbb{Z}_q$, где p, q – простые числа, индуцировано с одномерного представления какой-нибудь подгруппы этой группы.

9. Разложите в прямую сумму простых алгебр вещественную групповую алгебру группы **а)** A_4; **б)** Q_8; **в)** D_4; **г)** S_4; **д)** D_5.

10. Выпишите таблицу неприводимых комплексных характеров **а)** группы аффинных преобразований прямой над полем $\mathbb{F}_5$; **б)** группы аффинных преобразований прямой над полем $\mathbb{F}_7$; **в)** полупрямого произведения групп $\mathbb{Z}_2 \ltimes \mathbb{Z}_5$; **г)** полупрямого произведения групп $\mathbb{Z}_3 \ltimes \mathbb{Z}_7$.

11. Разложите в прямую сумму неприводимых тензорное произведение $U \otimes V$ представлений группы G, где **а)** $G = S_4$, $U = V$ – трехмерное представление симметриями тетраэдра; **б)** $G = S_4$, $U = V$ – трехмерное представление вращениями куба; **в)** $G = S_4$, U – трехмерное представление симметриями тетраэдра, V – двумерное неприводимое представление; **г)** $G = D_4$, $U = V$ – двумерное неприводимое представление; **д)** $G = Q_8$, $U = V$ – двумерное неприводимое представление.

12. Группа G действует на множестве X. Разложите представление группы G в пространстве $\mathbb{C}[X]$ в прямую сумму неприводимых, если **а)** $G = S_4$, X – множество ребер тетраэдра; **а)** $G = A_4$, X – множество ребер тетраэдра; **б)** $G = S_4$, X – множество вершин куба; **в)** $G = S_4$, X – множество ребер куба; **г)** $G = PGL_2(\mathbb{F}_5)$, $X = \mathbb{F}_5\mathbb{P}^1$; **д)** $G = S_5$, X – множество неупорядоченных пар различных элементов множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$; **е)** $G = S_5$, X – множество упорядоченных пар различных элементов множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

13. Разложите в прямую сумму неприводимых представление группы G, индуцированное с представления V подгруппы H, если **а)** $G = S_4$, $H = S_3$, V – знаковое представление; **б)** $G = S_4$, $H = S_3$, V – двумерное неприводимое представление; **в)** $G = D_4$, $H = \mathbb{Z}_4$, V – точное одномерное представление.

3 Литература

1. Э.Б.Винберг “Курс алгебры”, глава 11.

2. С.Ленг “Алгебра”, главы 17-18.