Задачи для экзамена

Здесь предложены задачи, многие из которых будут вам предложены на экзамене (возможно с незначительными изменениями). Экзамен будет устный. В билете будет предложено 2 задачи (каждый пункт в данном листочке считается отдельной задачей).

1. Пусть V представление группы G с характером χ. Докажите, что

   (a) кососимметрические тензоры $\Lambda^k V$ и симметрические тензоры $S^k V$ образуют представление той же группы G.

   (b) Напомним, что $e_k = \sum_{i_1<\ldots<i_k} x_{i_1}\ldots x_{i_k}$ элементарные симметрические многочлены, $h_k = \sum_{i_1\leq\ldots\leq i_k} x_{i_1}\ldots x_{i_k}$ – полные симметрические многочлены, $p_k = \sum x_i^k$ – ньютоновские суммы.

   Докажите, что $e_k = \sum_{\rho\vdash k}(-1)^{n-l(\rho)}\frac{p_\rho}{z_\rho}$, соответственно, $h_k = \sum_{\rho\vdash k}\frac{p_\rho}{z_\rho}$.

   (c) значения характеров на элементе $g \in G$ в представлениях $\Lambda^2 V$, $S^2 V$, $V\otimes V$ равны $\frac{\chi(g)^2-\chi(g^2)}{2}$, $\frac{\chi(g)^2+\chi(g^2)}{2}$, $\chi(g)^2$.

   (d) пользуясь выражением элементарных симметрических функций через функции Ньютона, докажите, что значение характера представлений $\Lambda^k(V)$ и $S^k(V)$ на элементе g выражается через $\chi(g), \chi(g^2), \ldots, \chi(g^k)$. Найдите это выражение.

2. Покажите, что если группа G имеет абелеву подгруппу индекса m, то размерность её неприводимого представления не больше чем m.

   Указание: Докажите, что любое неприводимое представление является подпредставлением в индуцированном с подгруппы.

3. Пусть H, K две подгруппы в группе G. $\mathbb{C}$ обозначает тривиальное представление. Докажите, что размерность пространства гомоморфизмов $\dim Hom_G(Ind_K^G\mathbb{C}, Ind_H^G)$ равна количеству K-орбит на множестве левых смежных классов G/H.

4. Докажите, что для цепочки вложенных групп $K \subset H \subset G$ и произвольного представления V имеется изоморфизм представлений $Ind_H^G(Ind_K^H V)$ и $Ind_K^G V$.

5. Вычислите значение характера на цикловом типе $\rho \vdash n$ у индуцированного представления

   (a) $Ind_{S_{n-1}}^{S_n}\mathbb{C}^{n-1}$, где $\mathbb{C}^{n-2}$ симплициальное представление S_{n-1}. То есть $\mathbb{C}^{n-2}$ есть гиперплоскость $e_1+\ldots+e_{n-1}=0$ в пространстве с базисом $e_1,\ldots,e_{n-1}$.

   (b) $Ind_{S_{n-1}}^{S_n}\Lambda^2\mathbb{C}^{n-2}$,

   (c) $Ind_{\mathbb{Z}_n}^{S_n}\mathbb{C}_\xi$, где $\mathbb{C}_\xi$–одномерное представление, в котором образующая действует умножением на примитивный корень n-ой степени из единицы ξ.

   Ответ: значение может быть отлично от нуля только на цикловом типе $(d)^{n/d}$, где d-делитель числа n и равно $\mu(d)\cdot(n-1)!$, где μ – функция Мёбиуса.

   (d) индуцированное с тривиального характера $Ind_{\mathbb{Z}_n}^{S_n}\mathbb{C}$.

   (e) $Ind_{D_n}^{S_n}\mathbb{C}_\xi^2$, где $\mathbb{C}_\xi^2$ неприводимое двумерное представление группы диэдра, в котором одно из собственных значений поворота равно ξ.

6. Вычислите размерность пространства S_n-эквивариантных отображений $Hom_{S_n}(\Lambda^k\mathbb{C}^n, \Lambda^m\mathbb{C}^n)$. Выведите отсюда, что представление $\Lambda^k\mathbb{C}^{n-1}$ неприводимо для $k < n$.

7. Разложите на неприводимые представление группы S_4 на векторном пространстве с базисом из множества X всевозможных пар непересекающихся подмножеств в множестве $\{1,2,3,4\}$ мощностей 2 и 1. То есть $X = \{\{1,2\}\sqcup\{3\}, \{1,3\}\sqcup\{4\}, \ldots, \{i_1,i_2\}\sqcup\{i_3\}, \ldots\}$.

8. Пусть $\lambda = \{\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n\}$ и $\mu = \{\mu_1 \geq \ldots \geq \mu_n\}$ две диаграммы Юнга (два разбиения числа n), такие что первое ненулевое число $\lambda_i - \mu_i$ положительно. Докажите, что не существует нетривиальных сплетающих операторов между представлениями $U_\lambda := Ind_{S_{\lambda_1}\times\ldots}^{S_n}\mathbb{C}$ и $W_\mu := Ind_{S_{\mu_1^t}\times\ldots}^{S_n} Sgn$ (где за μ^t обозначена транспонированная диаграмма).

9. Пусть $ch_n : Rep(S_n) \to \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n, \ldots]^{S_{n+\cdots}}$ характеристическое отображение, которое переводит дельта-функцию на классе сопряженности с цикловым типом $\rho \vdash n$ в симметрическую функцию $\frac{p_{\rho_1}\cdots p_{\rho_2}\cdots}{z_\rho}$, где z_ρ размерность стабилизатора элемента в классе сопряженности. Докажите, что $ch_{n+m}(Ind_{S_n\times S_m} V \otimes W) = ch_n(V)\cdot ch_m(W)$.

10. Напомним, что группой Гейзинберга $Heis_N$ мы называем группу унитреугольных 3×3-матриц $\left(\begin{smallmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ над вычетами по модулю N: $a, b, c \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

    (a) Вычислите размерности и количество неприводимых представлений для группы Гейзенберга $Heis_N$,

    (b) Опишите эти представления явно.

11. (a) Опишите размерности неприводимых представлений группы G порядка pq, где p, q – различные простые числа.

    (b) Докажите, что любое неодномерное неприводимое представление индуцировано с одномерного представления нормальной подгруппы. Для каких одномерных представлений соответствующие индуцированные представления изоморфны?

12. Пусть $G = \mathbb{Z}_p \ltimes \mathbb{Z}_q^{\times p}$, где образующая циклической группы $\mathbb{Z}_p$ действует перестановкой множителей в нормальной подгруппе $\mathbb{Z}_q \times \ldots \times \mathbb{Z}_q$.

    (a) Разложите на неприводимые представление, индуцированное с одномерного представления нормальной подгруппы.

    (b) Опишите все неприводимые представления группы G.

13. Напомним, что мультипликативная группа поля из q элементов циклическая, а, значит, существует автоморфизм $\varphi \in Aut(\mathbb{Z}_q)$ степени $q-1$. Пусть d некоторый делитель числа $q-1$. Определим полупрямое произведение групп $\mathbb{Z}_{kd} \ltimes \mathbb{Z}_q$ как группу, порожденную элементами a, b и соотношениями $a^{kd} = b^q = 1$ и $aba^{-1} = \varphi^{q/d}(b)$. Опишите неприводимые представления данной группы.

14. Опишите разложение на неприводимые ограничение неприводимого представления симметрической группы S_n на знакопеременную подгруппу A_n. Выведите отсюда классификацию неприводимых представлений A_n.

15. Опишите размерности неприводимых представлений группы $SL_2(\mathbb{F}_q)$ для (a) $q = 3$, (b) $q = 5$.

16. Грассманианом $Gr_{\Bbbk}(k, n)$ называется множество k-мерных подпространств в n-мерном пространстве над полем $\Bbbk$. Заметим, что для конечного поля $\Bbbk = \mathbb{F}_q$ грассманиан является конечным множеством, на котором естественно действует группа $GL_n(\mathbb{F}_q)$.

    (a) Опишите множество $GL_n(\mathbb{F}_q)$ эквивариантных гомоморфизмов между $\mathbb{C}[Gr(k, n)]$ и $\mathbb{C}[Gr(m, n)]$.

    (b) Разложите на неприводимые представление $\mathbb{C}[Gr(k, n)]$.

17. (a) Опишите пространство классов сопряженности для $GL_2(\mathbb{F}_q)$.

    (b) Вычислите характер представления $GL_2(\mathbb{F}_q)$, индуцированного с одномерного представления подгруппы верхнетреугольных матриц.