АЛГЕБРА I, ОСЕННИЙ СЕМЕСТР 2013 Г.

Задачи для подготовки к зачёту.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Задачи рекомендуется решать самостоятельно для подготовки к экзамену и обсуждать решения на семинарах.

Задача 1. Пусть $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ — многочлен, а A — вещественная 2×2-матрица с собственными значениями λ_1 и λ_2.

(а) Докажите, что если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то

$$f(A) = f(\lambda_1)\frac{A - \lambda_2 I}{\lambda_1 - \lambda_2} + f(\lambda_2)\frac{A - \lambda_1 I}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

(б) Придумайте аналогичную формулу для случая $\lambda_1 = \lambda_2$.

Задача 2. Обозначим через $\mathrm{Aut}(G)$ группу всех автоморфизмов группы G. Групповая операция на Aut — композиция. Постройте изоморфизмы:

(а) $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$;

(б) $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \simeq GL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ для простого p;

(в) $\mathrm{Aut}(S_3) \simeq S_3$;

(г) $\mathrm{Aut}(S_n) \simeq S_n$ при $n \neq 6$.

Задача 3. Пусть p — простое число, а $G = GL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

(а) Найдите нормальную неабелеву подгруппу в G, отличную от G.

(б) Найдите число элементов порядка 2 в G.

(в) Чему может быть равен порядок элемента из G?

(г) Найдите число классов сопряжённости в G.

Задача 4. (а) Обозначим через $\mathbb{R}[A]$ подкольцо в кольце вещественных $n \times n$-матриц, порождённое матрицей A. Может ли $\mathbb{R}[A]$ быть полем, если характеристический многочлен матрицы A равен

(1) $t^2 + 2$? (2) $t^2 - 2$? (3) $t^3 + 3$? (4) $t^4 + 4$? (4) $t^4 + 4t^2 + 4$?

(б) Какие из ответов в пункте (а) изменятся, если $\mathbb{R}[A]$ заменить на $\mathbb{Q}[A]$?

Задача 5. Сколько элементов в факторгруппе $\mathbb{Z}^3/H$, где $H \subset \mathbb{Z}^3$ — подгруппа, порождённая векторами $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ и $(0, 1, 1)$?

Задача 6. Существует ли целочисленная 3×3-матрица A, такая что

(а) $A^3 - 2I = 0$? (б) $A^2 + I = 0$? (в) $A^4 + 4I = 0$? (г) $A^3 + 2A^2 + 3A + 4I = 0$?

Задача 7. Пусть $\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$ — минимальное подполе, содержащее все корни многочлена $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Найдите размерность поля $\mathbb{F}$ как векторного пространства над $\mathbb{Q}$ для

(а) $x^2 - 2$; (б) $x^3 - 2$; (в) $x^4 + 4$; (г) $x^4 + 1$; (д) $x^4 - 2$.

Задача 8. Автоморфизм $\varphi : G \to G$ группы G называется *внутренним*, если он задаётся сопряжением с помощью элемента группы, то есть существует $h \in G$, такой что

$$\varphi(g) = hgh^{-1} \text{ для всех } g \in G.$$

Обозначим через $\mathrm{Int}(G) \subset \mathrm{Aut}(G)$ подгруппу, состоящую из всех внутренних автоморфизмов.

(а) Докажите, что $\mathrm{Int}(G) \simeq G/Z(G)$, где $Z(G) \subset G$ — центр группы G.

(б) Докажите, что $\mathrm{Int}(G) \subset \mathrm{Aut}(G)$ — нормальная подгруппа.

(в) Постройте автоморфизм группы S_6, не являющийся внутренним.

(г) Докажите, что $\mathrm{Aut}(S_6)/\mathrm{Int}(S_6)$.