Листок 6. Знакопостоянные числовые ряды

Анализ, 1 курс, **14.01.2014**

Срок сдачи листка 29 января.

Максимальная оценка за листок ставится, если по нему набрано не менее десяти баллов. Сдача решения каждой задачи с ноликом или пункта задачи без нолика дает один балл, задачи со звездочкой — два балла. Кроме того, за каждую несданную задачу с ноликом снимется один балл. Задача с ноликом сдается только целиком, в остальных задачах каждый пункт оценивается отдельно.

6◇1^0 Для каждого вещественного $\alpha > 0$ исследуйте на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\alpha}$, где a_n — последовательность положительных чисел, стремящаяся к единице.

6◇2^0 Исследуйте следующие ряды на сходимость: (а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{\sqrt{n}}$; (б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{\ln n}$, где $q \in (0,1)$;

(в) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$; (г) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$.

6◇3^0 Пусть a_n, $b_n > 0$ и $\varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$, а $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \leqslant K < \infty$. Докажите, что ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ сходятся и расходятся одновременно.

6◇4^0 Пусть $a_n > 0$. Верны ли следующие утверждения?
(а) Если $a_n > 1/n$ для бесконечного множества значений n, то ряд $\sum a_n$ расходится.
(б) Если $\sum a_n < \infty$, то и $\sum a_n^{1+\varepsilon} < \infty$ при каждом $\varepsilon > 0$.

6◇5 Пусть $a_n > 0$, и $a_n \to 0$. Докажите, что существует такая монотонно убывающая последовательность $b_n > 0$, что ряд $\sum b_n$ расходится, а ряд $\sum a_n b_n$ — сходится.

6◇6 Сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n}$, где F_n — числа Фибоначчи? (Числа Фибоначчи определяются условием $F_1 = F_2 = 1$ и рекуррентной формулой $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ при $n > 1$.)

6◇7 Пусть последовательности a_n, $b_n > 0$ монотонные и невозрастающие, а ряды $\sum a_n$, $\sum b_n$ расходятся. Следует ли из этого, что ряд $\sum \min\{a_n, b_n\}$ расходится?

6◇8 Для произвольного подмножества $M \subset \mathbb{N}$ будем называть суммой частичного ряда, соответствующего M, величину $S(M) = \sum_{n\in M} a_n$ (по определению $S(\varnothing) = 0$). Существует ли такой ряд $\sum a_n$, что $a_n \to 0$ и суммы всех его частичных рядов заполняют канторово множество?

6◇9* Определим число e как сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Докажите, что e иррационально.

6◇10* Обозначим n-ое простое число через p_n. Докажите, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ расходится.

6◇11* Сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\cos(n)|^{n^2}$?

6◇12* Пусть $a_n > 0$, и пусть при некоторых $\varepsilon, \mu, \lambda > 0$ справедливо равенство

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right).$$

Докажите, что при $\lambda > 1$ ряд сходится, при $\lambda < 1$ — расходится, при $\lambda = 1$ и $\mu > 1$ ряд сходится, при $\lambda = 1$ и $\mu \leqslant 1$ — расходится (признак сходимости Гаусса).