Задачи этого листка не обязательны для сдачи в модуле 2, но рекомендуются для подготовки к экзамену. Для всех записавшихся на вторую часть курса этот листок становится обязательным для сдачи в модуле 3.

Задачи, после номера которых стоит буква "B", не являются обязательными. Решившие их получат бонусные баллы.

5.1. Для каждой из следующих алгебр A дайте критерий обратимости ее элемента и найдите спектр каждого ее элемента: **(a)** $A = \mathbb{C}[t]$; **(b)** $A = \mathbb{C}[[t]]$; **(c)** $A = \mathbb{C}(t)$.

5.2. Пусть (X, μ) — пространство с мерой, $f \colon X \to \mathbb{C}$ — измеримая функция. Напомним (см. лекцию), что число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *существенным значением* f, если $\mu(f^{-1}(U)) > 0$ для любой окрестности $U \ni \lambda$. Также напомним (см. лекцию), что если f существенно ограничена, то ее спектр как элемента алгебры $L^\infty(X, \mu)$ равен множеству всех ее существенных значений.
(a) Приведите пример, показывающий, что значение f не обязано быть ее существенным значением.
(b) Приведите пример, показывающий, что существенное значение f не обязано быть ее значением.
(c) Докажите, что если $X = [a, b]$ — отрезок с мерой Лебега, а f непрерывна, то множество ее значений совпадает с множеством ее существенных значений.

5.3. Пусть A — унитальная алгебра, $a, b \in A$.
(a) Докажите, что элемент $1 - ab$ обратим тогда и только тогда, когда элемент $1 - ba$ обратим. (*Указание.* Можно сначала угадать формулу, выражающую $(1 - ba)^{-1}$ через $(1 - ab)^{-1}$, а потом проверить, что она верна. А чтобы ее угадать, можно предположить, что $A = \mathbb{C}$, $|a| < 1$ и $|b| < 1$, и забыть о коммутативности умножения в $\mathbb{C}$.)
(b) Докажите, что $\sigma(ab) \cup \{0\} = \sigma(ba) \cup \{0\}$.
(c) Докажите, что если a или b обратим, то $\sigma(ab) = \sigma(ba)$.
(d) Приведите пример, показывающий, что в общем случае $\sigma(ab) \neq \sigma(ba)$.

5.4. Пусть A — ненулевая унитальная алгебра. Найдите спектр любого ее **(a)** нильпотентного элемента; **(b)** идемпотентного элемента, отличного от 0 и 1.

5.5-B (*банахова лемма Шура*)**.** Пусть дано неприводимое представление группы G в банаховом пространстве X ограниченными операторами. Докажите, что любой морфизм G-модулей $\varphi \colon X \to X$ имеет вид $\varphi = \lambda \mathbf{1}_X$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$.

5.6. Верно ли, что $r(a) = \|a\|$ для любого $a \in A$, если **(a)** $A = L^\infty(X, \mu)$? **(b)** $A = C^n[a, b]$? (Напомним, что $C^n[a, b]$ — банахова алгебра относительно нормы $\|f\| = \sum_{k=0}^n \|f^{(k)}\|_\infty / k!$).

5.7 (*оператор взвешенного сдвига*)**.** Пусть $H = \ell^2$ и $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$. Оператор

$$T_\alpha \colon H \to H, \quad T_\alpha(x) = (0, \alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots)$$

называется *оператором взвешенного сдвига.* (*Реклама*: такие операторы изучаются давно, но особую популярность приобрели в 90-х гг. прошлого века ввиду их важности для теории представлений компактных квантовых групп.) Вычислите $\|T_\alpha\|$, вычислите $r(T_\alpha)$ и приведите пример последовательности α, для которой оператор T_α квазинильпотентен.

5.8 (*оператор Вольтерра*)**.** Пусть $I = [a, b]$, $H = L^2(I)$ и $K \in L^2(I \times I)$. *Оператор Вольтерра* $V_K \colon L^2(I) \to L^2(I)$ задается формулой

$$(V_K f)(x) = \int_a^x K(x, y) f(y) \, dy$$

(*Реклама*: операторы Вольтерра образуют один из наиболее классических и давно изучаемых классов линейных операторов; они играют важную роль в теории интегральных уравнений, описывающих различные физические процессы.)
(a) Докажите, что если функция K ограничена, то V_K квазинильпотентен.
(b)-B Докажите, что V_K квазинильпотентен для любой $K \in L^2(I \times I)$.

5.9. Найдите точечный, непрерывный и остаточный спектры диагонального оператора в ℓ^∞.

5.10. Пусть (X, μ) — пространство с мерой, f — существенно ограниченная измеримая функция на X и M_f — оператор умножения на f, действующий в $L^p(X, \mu)$ (где $1 \leqslant p \leqslant \infty$). Найдите точечный, непрерывный и остаточный спектры оператора M_f.

5.11. Найдите спектр оператора $T\colon L^2[-\pi, \pi] \to L^2[-\pi, \pi]$, действующего по формуле

$$(Tf)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(t-s) f(s)\, ds.$$

5.12. Найдите спектр, точечный спектр, непрерывный спектр и остаточный спектр операторов правого и левого сдвига, действующих в пространстве c_0.

5.13. Сделайте то же самое, что в предыдущей задаче, для пространства ℓ^1.

5.14. Сделайте то же самое, что в предыдущей задаче, для пространства ℓ^∞.

5.15. Для фиксированного $\zeta \in \mathbb{T}$ определим оператор сдвига $T_\zeta\colon L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$ формулой $(T_\zeta f)(z) = f(\zeta^{-1} z)$. Найдите его спектр, точечный спектр, непрерывный спектр и остаточный спектр.

5.16-B. Сделайте то же самое, что в предыдущей задаче, для пространств $L^p(\mathbb{T})$ и $C(\mathbb{T})$.

5.17. Докажите, что спектр биективной изометрии в банаховом пространстве содержится в $\mathbb{T}$.

5.18. (a) Докажите, что в унитальной банаховой алгебре $A \neq 0$ не может существовать таких элементов a, b, что $[a, b] = ab - ba = 1$.
(b) Докажите, что алгебра дифференциальных операторов вида $\sum_{k=0}^{n} a_k(x) \frac{d^k}{dx^k}$, где $a_k \in \mathbb{C}[x]$ (она называется *алгеброй Вейля*) не имеет представлений ограниченными операторами в ненулевых банаховых пространствах.

5.19-B. Пусть $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Алгебраическим *квантовым тором* называется алгебра A_q с двумя обратимыми образующими u, v и соотношением $uv = qvu$. (*Реклама*: эта алгебра играет важную роль в некоммутативной геометрии. Соотношения $uv = qvu$ тесно связаны с *каноническими коммутационными соотношениями* Г. Вейля в квантовой механике.)
(a) Докажите, что если $|q| \neq 1$, то A_q не имеет представлений ограниченными операторами в ненулевых банаховых пространствах.
(b) Пусть $|q| = 1$. Постройте унитарные операторы U, V в пространстве $L^2(\mathbb{T})$, удовлетворяющие соотношению $UV = qVU$ (они дают, таким образом, представление A_q в $L^2(\mathbb{T})$). *Подсказка*: см. задачи 5.10 и 5.15.
(c) Пусть $|q| = 1$, U и V — биективные изометрические линейные операторы в банаховом пространстве, удовлетворяющие соотношению $UV = qVU$. Найдите их спектры при условии, что q не является корнем из единицы.