

Дискретная математика

Семинар 1

ВШЭ, факультет математики

первый курс, третий модуль

1. Сколько подмножеств множества $\{1, \dots, n\}$ содержит хотя бы одно нечётное число?
2. Сколькими способами можно упорядочить буквы в слове МИССИС-СИППИ таким образом, чтобы четыре буквы С не стояли подряд?
3. Сколько существует функций $f : \{1, \dots, 5\} \rightarrow \{1, \dots, 5\}$, таких что $\#f^{-1}(k) \leq 2$ для всех $k = 1, \dots, 5$?
4. Докажите (по-возможности, комбинаторно) следующие равенства:

$$\text{а). } \sum_{i=0}^n \binom{x+i}{i} = \binom{x+n+1}{n},$$

$$\text{б). } \sum_{i=0}^n i \binom{n}{i} = n2^{n-1},$$

$$\text{в)*. } \sum_{i=0}^n \binom{2i}{i} \binom{2(n-i)}{n-i} = 4^n.$$

5. а). Сколько существует путей на плоскости из точки $(0, 0)$ в точку (n_1, n_2) , $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, состоящих из отрезков $(1, 0)$ и $(0, 1)$?
б). Обобщите пункт а) на высшие размерности (пути в d -мерном пространстве).
6. а). Пусть p – простое число, $n = \sum_{i \geq 0} a_i p^i$, $m = \sum_{i \geq 0} b_i p^i$ – p -ичные разложения чисел n и m . Покажите, что

$$\binom{n}{m} \equiv \binom{a_0}{b_0} \binom{a_1}{b_1} \dots \pmod{p}.$$

- б). При каких n , m биномиальный коэффициент $\binom{n}{m}$ нечётный? При каких n все биномиальные коэффициенты $\binom{n}{m}$, $0 \leq m \leq n$ нечётны?

7. Назовём разложением числа n равенство вида $n = a_1 + \dots + a_k$, $a_i > 0$. Например, число 3 имеет ровно 4 разложения $3 = 3$, $3 = 2 + 1$, $3 = 1 + 2$, $3 = 1 + 1 + 1$. Числа a_i называются частями разложения.

- а). Найдите число разложений числа n .
б). Найдите число разложений числа n , имеющих чётное число чётных частей.