Алгебра-2 (матфак ВШЭ 2013-2014): расширения полей листок 1

Срок сдачи листка 4 февраля (сданные позже задачи учитываются с коэффициентом 1/2). Вклад листков в оценку - половина (другая половина - оценка за контрольную, или средний балл по контрольным, если вдруг их окажется несколько). В каждом листке есть простой теорвопрос, он стоит двух задач, но пока он не сдан, баллы за листок не засчитываются.

1 (этот самый вопрос) Пусть K поле, x – элемент некоторого расширения K. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны: а) x алгебраичен над K (т.е. удовлетворяет полиномиальному уравнению с коэффициентами из K) б) $K[x]$ – конечномерное векторное пространство над K в) $K[x]$ – поле г) $K[x] = K(x)$.

2 Пусть R – коммутативное ассоциативное кольцо с единицей без делителей нуля, а x удовлетворяет полиномиальному уравнению с коэффициентами из R. Верно ли, что $R[x]$ конечно порождено как R-модуль? При каком (разумном) условии на коэффициенты уравнения это окажется верным?

3 Пусть $\mathbb{Q}(x)$ – поле рациональных функций от одной переменной, а f, g взаимно простые многочлены (не константы). Рассмотрим подполе $\mathbb{Q}(\frac{f(x)}{g(x)})$. Покажите, что $\mathbb{Q}(x)$ алгебраично над $\mathbb{Q}(\frac{f(x)}{g(x)})$, а $\mathbb{Q}(\frac{f(x)}{g(x)})$ трансцедентно над $\mathbb{Q}$. Найдите степень расширения $[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}(\frac{f(x)}{g(x)})]$.

4 Пусть L – алгебраическое расширение K и $f : L \to L$ – гомоморфизм над K. Докажите, что f изоморфизм (указание: выведите это из соответствующего факта для конечных расширений). Верно ли это утверждение, если L не является алгебраическим?

5 Найдите минимальный многочлен $e^{\frac{2\pi i}{5}}$ над $\mathbb{Q}$, над $\mathbb{Q}(i)$ и над $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

6 Пусть m, n положительные числа, не являющиеся квадратами. Проверьте, что $\mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n}) = \mathbb{Q}(\sqrt{m} + \sqrt{n})$, найдите $[\mathbb{Q}(\sqrt{m} + \sqrt{n}) : \mathbb{Q}]$ и минимальный многочлен $\sqrt{m} + \sqrt{n}$ над $\mathbb{Q}$.

В дальнейшем $\mathbb{F}_q$ обозначает конечное поле из q элементов.

7 Пусть q – степень простого числа. Докажите эквивалентность следующих утверждений: $X^3 - 1$ распадается на линейные множители над $\mathbb{F}_q$; -3 является квадратом в $\mathbb{F}_q$; $q \equiv 1 \pmod 3$.

8 Докажите, что многочлен f степени d приводим над $\mathbb{F}_q$ тогда и только тогда, когда он имеет корень в $\mathbb{F}_{q^l}$ для некоторого $l \leq d/2$.

9 Докажите, что многочлен $X^4 + 1$ приводим над полем $\mathbb{F}_p$ для любого простого p, но неприводим над $\mathbb{Z}$ (для приводимости воспользуйтесь предыдущим упражнением).

10 Пусть p простое. Докажите, что многочлен $X^p - a$ неприводим над полем K тогда и только тогда, когда у него нет корня в K (указание: как может выглядеть какой-либо сомножитель? воспользуйтесь тождеством Безу.)

11 Пусть p простое. Докажите, что $X^p - X - 1$ неприводим над $\mathbb{F}_p$.