ТФКП-2014

Листок 1

срок сдачи 31.01.2014

1. Докажите, что при преобразовании $z \mapsto 1/z$ окружность переходит в окружность или прямую, а также что прямая переходит в окружность или прямую.

2. а) Написать уравнение окружности, проходящей через три (различные) точки z_1, z_2, z_3, не лежащие на одной прямой.

б) Доказать, что четыре (различные) точки z_1, z_2, z_3, z_4 лежат на одной окружности или прямой прямой тогда и только тогда, когда их двойное отношение $\dfrac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}$ вещественно.

3. Привести пример функции $f(z, \bar{z})$, для которой предел при $z \to 0$ вдоль любой прямой существует и все такие пределы равны между собой, но при этом $\lim\limits_{z \to 0} f(z, \bar{z})$ не существует.

4. Пусть $f(z)$ – дифференцируемая функция комплексной переменной в точке a. Доказать, что функция $\overline{f(\bar{z})}$ дифференцируема в точке $\bar{a}$.

5. а) Доказать, что если голоморфная в некоторой области функция $f(z)$ вещественна (т.е. принимает только вещественные значения), то она постоянна.

б) Пусть функция $f(z)$ голоморфна в некоторой области D, и $|f(z)| = 1$ всюду в этой области. Доказать, что $f(z) \equiv \text{const}$.

6. Восстановить голоморфную функцию $f(z)$, $z = x + iy$, по заданной функции

а) $\operatorname{Re} f(z) = e^x(x \cos y - y \sin y)$ (при условии, что $f(0) = 0$),

б) $\arg f(z) = xy \pmod{2\pi}$ (при условии, что $f(0) = 1$).

Вещественнозначная функция двух переменных $F(x, y)$ называется *гармонической*, если $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$.

7. а) Пусть $f(z)$ – голоморфная функция. Докажите, что функции $\mathrm{Re} f$ и $\mathrm{Im} f$ – гармонические.

б) Пусть $F(x, y)$ – гармоническая функция. Для каких функций G функция $G(F(x, y))$ тоже будет гармонической?