

Дискретная математика

Семинар 2

ВШЭ, факультет математики
первый курс, третий модуль

1. Числа Фибоначчи F_k определяются по формулам: $F_1 = F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ при $n \geq 3$. Выразите через числа Фибоначчи:

- число подмножеств множества $\{1, \dots, n\}$, не содержащих никаких двух последовательных чисел.
- число разложений n на части, равные 1 или 2.
- число разложений n на нечётные слагаемые.
- число последовательностей (a_1, \dots, a_n) нулей и единиц, таких что $a_1 \leq a_2 \geq a_3 \leq a_4 \geq \dots$.

2. При каком значении (значениях) k величина $\binom{n}{k}$ максимальна (при фиксированном n)?

3. Определим q -биномиальные коэффициенты (многочлены Гаусса) по формуле:

$$\binom{n}{k}_q = \frac{\prod_{i=n-k+1}^n (1 - q^i)}{\prod_{i=1}^k (1 - q^i)}.$$

Докажите, что

- $\binom{n}{m}_q = \binom{n-1}{m}_q + q^{n-m} \binom{n-1}{m-1}_q$.
- $\binom{n}{m}_q = q^m \binom{n-1}{m}_q + \binom{n-1}{m-1}_q$.
- $\lim_{q \rightarrow 1} \binom{n}{m}_q = \binom{n}{m}$.

4. Постройте функцию f на множестве Λ_k k -элементных подмножеств множества $\{1, \dots, n\}$, такую что

$$\sum_{M \in \Lambda_k} q^{f(M)} = \binom{n}{k}_q.$$

5. Докажите, что число k -мерных подпространств n -мерного пространства над полем из q элементов равно $\binom{n}{k}_q$.

6. Пусть $f_k(n)$ – число перестановок из S_n , имеющих ровно k инверсий. Докажите, что при $n \geq k$ $f_k(n+1) = f_k(n) + f_{k-1}(n+1)$. Докажите, что при $n \geq k$ $f_k(n)$ есть полином от n степени k со старшим коэффициентом $1/k!$. Вычислите $f_2(n)$ при $n \geq 2$.