

ЛИСТОК 7. ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

АНАЛИЗ, 1 КУРС, 28.01.2014

Срок сдачи листка 12 февраля.

Максимальная оценка за листок ставится, если по нему набрано не менее десяти баллов. Сдача решения каждой задачи с ноликом или пункта задачи без нолика дает один балл, задачи со звездочкой — два балла. Кроме того, за каждую несданную задачу с ноликом снимется один балл. Задача с ноликом сдается только целиком, в остальных задачах каждый пункт оценивается отдельно.

7◊1⁰ Пусть ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ сходятся и пусть $a_n \leq c_n \leq b_n$. Докажите, что ряд $\sum c_n$ тоже сходится.

7◊2 Докажите, что если ряд $\sum a_n$ сходится, то сходится и имеет ту же сумму и ряд $\sum A_n$, где

$$A_n = \sum_{k=r_n}^{r_{n+1}-1} a_k, \quad 1 = r_1 < r_2 < r_3 < \dots$$

(то есть, ряд $\sum A_n$ получен группировкой членов ряда $\sum a_n$ без нарушения порядка их следования). Верно ли «обратное» утверждение: если при каком-то разбиении на слагаемые A_n полученный ряд сходится, то сходится исходный ряд и имеет ту же сумму?

7◊3 Докажите, что следующие утверждения равносильны.

(1) Ряд $\sum a_n$ сходится абсолютно.

(2) Для любой последовательности δ_n из нулей и единиц ряд $\sum \delta_n a_n$ сходится.

(3) Для любой последовательности комплексных чисел ε_n , таких что $|\varepsilon_n| = 1$, ряд $\sum \varepsilon_n a_n$ сходится.

7◊4 Пусть ряд $\sum a_n$ сходится к ненулевой сумме. Докажите, что ряд $\sum b_n$, где $b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$, расходится.

7◊5⁰ (а) Пусть a_n — монотонная последовательность, такая что $a_n > 0$, и $a_n \rightarrow 0$. Следует ли отсюда, что ряд $\sum (-1)^n a_n$ сходится?

(б) Останется ли утверждение пункта (а) верным, если отбросить требование монотонности?

7◊6⁰ Исследуйте на сходимость ряды: $\sum \frac{\cos n}{n}$, $\sum \frac{\operatorname{arctg} n \sin n}{\ln n}$.

7◊7 Сходятся ли ряды: (а) $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^{n-1}}$, (б) $\sum \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n^2}} \right)$?

7◊8 Найдите значения параметров a и b , при которых ряды сходятся и абсолютно сходятся:

$$(а) \frac{1}{1^a} - \frac{1}{2^b} + \frac{1}{3^a} - \frac{1}{4^b} + \frac{1}{5^a} - \frac{1}{6^b} + \dots, \quad (б) 1 - \frac{2}{2^a} + \frac{1}{3^b} + \frac{1}{4^a} - \frac{2}{5^b} + \frac{1}{6^a} + \frac{1}{7^a} - \frac{2}{8^b} + \frac{1}{9^a} + \dots$$

7◊9 Пусть ряд $\sum a_n$ сходится, и пусть $\lim a_n/b_n = 1$. Следует ли из этого, что ряд $\sum b_n$ сходится?

7◊10⁰ Пусть ряд $\sum a_n$ условно сходится, и пусть $\sum_{k=1}^n a_k = S_n^+ + S_n^-$, где S_n^+ — сумма положительных слагаемых, а S_n^- — сумма отрицательных. Докажите, что существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^+}{S_n^-}$ (по всем n , таким $S_n^- \neq 0$) и найдите его.

7◊11 Пусть ряд $\sum a_n$ сходится. Обязательно ли сходится ряд (а) $\sum a_n^2$? (б) $\sum a_n^3$?

7◊12^{*} Пусть ряд $\sum a_n$ сходится. Пусть функция φ монотонна и ограничена на $[0, \infty)$. Докажите, что при $\varepsilon \rightarrow +0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(\varepsilon n) a_n \rightarrow \varphi(+0) \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$