

Дискретная математика
Семинар 3

ВШЭ, факультет математики
первый курс, третий модуль

1. Найдите число длинных циклов в группе S_n .
2. Найдите ряд $A(s) = \sum_{k \geq 0} a_k s^k$, такой что $A(s)^2 = 1 + s$.
3. Обобщите предыдущую задачу на случай $A(s)^n = 1 + s$, $n > 2$.
4. Выразите коэффициенты многочлена $x(x-1) \dots (x-n+1)$ через числа Стирлинга первого рода. Вычислите знакопеременную сумму чисел Стирлинга первого рода $\sum_{k \geq 0} (-1)^k s(n, k)$.
5. Определите коэффициент a_n в разложении

$$(1 + qs)(1 + qs^2)(1 + qs^4)(1 + qs^8) \dots = \sum_{n \geq 0} a_n s^n.$$

6. Докажите тождество

$$\binom{2n}{0}^2 - \binom{2n}{1}^2 + \binom{2n}{2}^2 - \dots + \binom{2n}{2n}^2 = (-1)^n \binom{2n}{n}.$$

7. Вычислите сумму $\sum_{k=1}^n (-1)^k k \binom{n}{k}$.