Задачи, после номера которых стоит буква “B”, не являются обязательными. Решившие их получат бонусные баллы.

6.1. (a) Пусть X — нормированное пространство, $f \in X^* \setminus \{0\}$ и $X_0 = \operatorname{Ker} f$. Докажите, что в X существует 0-перпендикуляр к X_0 тогда и только тогда, когда f достигает нормы.
(b) Приведите пример банахова пространства X и собственного замкнутого векторного подпространства $X_0 \subset X$, к которому не существует 0-перпендикуляра.

6.2. (a) Докажите, что подмножество $S \subset \ell^p$ (где $1 \leqslant p < \infty$) вполне ограничено тогда и только тогда, когда оно ограничено и

$$\sup_{x \in S} \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p \to 0 \quad \text{при } n \to \infty$$

(т.е. нормы «хвостов» последовательностей из S равномерно стремятся к нулю).
(b) Сформулируйте и докажите аналогичный критерий для пространства c_0.

6.3-B. Докажите, что подмножество $S \subset L^p[a,b]$ (где $1 \leqslant p < \infty$) вполне ограничено тогда и только тогда, когда оно ограничено и для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $|h| < \delta$ и всех $f \in S$ выполнено

$$\int_a^b |f(x+h) - f(x)|^p \, dx < \varepsilon.$$

Указание (достаточность). Для $f \in L^p[a,b]$ функции $f_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)\, dt$ непрерывны и сходятся к f в $L^p[a,b]$. Примените к ним теорему Арцела–Асколи.

6.4. Компактны ли операторы правого и левого сдвига в ℓ^p и c_0?

6.5. Может ли образ компактного оператора между банаховыми пространствами содержать бесконечномерное замкнутое подпространство?

6.6. Докажите компактность оператора вложения $C^1[a,b] \to C[a,b]$.

6.7. Пусть $f \in C[a,b]$, и пусть M_f — оператор умножения на f в $C[a,b]$. Найдите условие на f, необходимое и достаточное для компактности M_f.

6.8. Пусть $I \subseteq \mathbb{R}$ — промежуток, $f \colon I \to \mathbb{C}$ — существенно ограниченная измеримая функция, и пусть M_f — оператор умножения на f в $L^p(I)$ ($1 \leqslant p \leqslant \infty$). Найдите условие на f, необходимое и достаточное для для компактности M_f.

6.9. Для интегрируемой функции f на $[0,1]$ определим функцию Tf формулой

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$

Является ли T компактным оператором
(a) из $C[0,1]$ в $C[0,1]$?
(b) из $L^p[0,1]$ в $C[0,1]$ (где $1 < p \leqslant \infty$)?
(c) из $L^p[0,1]$ в $L^p[0,1]$ (где $1 < p \leqslant \infty$)?
(d) из $L^1[0,1]$ в $C[0,1]$?
(e)-B из $L^1[0,1]$ в $L^1[0,1]$?

6.10. Пусть $I = [a, b]$, и пусть $K \in C(I \times I)$. Докажите компактность *интегрального оператора* $T\colon C(I) \to C(I)$,

$$(Tf)(x) = \int_a^b K(x,y) f(y)\, dy.$$

6.11. Пусть (X, μ) — пространство с мерой, и пусть $K \in L^2(X \times X, \mu \times \mu)$. Докажите компактность *интегрального оператора Гильберта–Шмидта* $T\colon L^2(X,\mu) \to L^2(X,\mu)$,

$$(Tf)(x) = \int_X K(x,y) f(y)\, d\mu(y).$$

Указание: докажите, что линейная оболочка множества функций вида $K(x,y) = f(x)g(y)$, где $f, g \in L^2(X,\mu)$, плотна в $L^2(X \times X, \mu \times \mu)$, и воспользуйтесь тем, что $\|T\| \leqslant \|K\|_2$ (см. задачу 2.14).

6.12. Пусть X — метризуемый компакт, μ — регулярная борелевская мера на X и $K \in C(X \times X)$. Докажите, что образ интегрального оператора Гильберта–Шмидта $T_K\colon L^2(X,\mu) \to L^2(X,\mu)$ содержится в $C(X)$, и что T_K является компактным оператором из $L^2(X,\mu)$ в $C(X)$.

6.13. Пусть X — банахово пространство и $1 \leqslant p < \infty$. Докажите, что всякий компактный оператор $T\colon X \to \ell^p$ аппроксимируется конечномерными операторами.

6.14. Пусть X — банахово пространство.
(a) Для $x \in X$ и $f \in X^*$ определим оператор $x \otimes f \in \mathscr{B}(X)$ формулой $(x \otimes f)(y) = f(y)x$. Представьте операторы $T(x \otimes f)$, $(x \otimes f)T$ (где $T \in \mathscr{B}(X)$) и $(x_1 \otimes f_1)(x_2 \otimes f_2)$ в виде $y \otimes g$ для некоторых $y \in X$ и $g \in X^*$.
(b) Пусть $0 \neq I \subseteq \mathscr{B}(X)$ — двусторонний идеал. Докажите, что $I \supseteq \mathscr{F}(X)$. Как следствие, всякий ненулевой замкнутый двусторонний идеал в $\mathscr{B}(H)$ (где H — гильбертово пространство) содержит $\mathscr{K}(H)$. (*Анонс:* через некоторое время мы сможем доказать, что $\mathscr{K}(H)$ — единственный замкнутый двусторонний идеал в $\mathscr{B}(H)$, отличный от 0 и $\mathscr{B}(H)$).