ТФКП-2014

Листок **2**

срок сдачи 21.02.2014

1. Найдите дробно-линейную функцию f, взаимно-однозначно отображающую единичный круг $\{z \mid |z| < 1\}$ в себя и такую, что $f(0) = i/2$, $f'(0) \in \mathbb{R}_+$.

2. Найдите голоморфную функцию, взаимно-однозначно отображающую область Ω на верхнюю полуплоскость $\mathbb{H}$ для следующих областей Ω:

а) полоса $a < \operatorname{Im} z < b$,

б) полуполоса $a < \operatorname{Im} z < b$, $\operatorname{Re} z > c$,

в) $\mathbb{H} \setminus [0, i]$ (верхняя полуплоскость с выкинутым отрезком от 0 до i),

г) $\bar{\mathbb{C}} \setminus [0, 1]$ (расширенная комплексная плоскость с выкинутым отрезком от 0 до 1),

д) внешность параболы $\operatorname{Im} z < (\operatorname{Re} z)^2$,

е) внешность эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a, b \in \mathbb{R})$.

3. Пусть $D \Subset \mathbb{C}$ – односвязная область, ограниченная гладкой кривой $\gamma = \partial D$, и $w(z)$ – голоморфная функция, взаимно-однозначно отображающая $\bar{D}$ на замыкание единичного круга $\{w \mid |w| \le 1\}$.

а) Выразить единичный касательный и нормальный векторы к кривой γ в точках $z \in \partial D$ через граничные значения $w(z)$ и $w'(z)$ (касательный вектор направлен против часовой стрелки, а нормальный – во внешность области D),

б) Выразить кривизну кривой γ через граничные значения w, w', w''.

4. Докажите, что если функция $f(z)$ голоморфна в области $D \subset \mathbb{C}$, непрерывна в $\bar{D}$ и $|f(z)| = \mathrm{const}$ на ∂D, то $f(z)$ имеет в D хотя бы один ноль.

5. Докажите, что если функция $f(z)$ голоморфна и ограничена в правой полуплоскости и $f(n) = 0$ для всех целых $n > 0$, то $f \equiv 0$.

6. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – область, содержащаяся в некотором круге $|z| < R$. Доказать тождества

а) $\displaystyle\oint_{\partial D} z^k \bar{z}\, dz = 2i \iint_D z^k\, dx\, dy\,, \qquad k \ge 0,$

б) $\displaystyle\oint_{\partial D} z^k\, d\bar{z} = -2ik \iint_D z^{k-1}\, dx\, dy\,, \qquad k \ge 0.$

7. Вычислить интеграл $\displaystyle\oint_\gamma \frac{2z^2 + 5z + 2}{z(z+1)^2}\, dz$, где контур γ – окружность $|z| = 3$.

8. Для функции $f(z)$, голоморфной во внешности области $D \ni 0$ и такой, что $f(\infty) = A < \infty$, доказать, что

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{z\zeta - \zeta^2} = \begin{cases} f(z)/z\,, & z \notin D \\ 0\,, & z \in D \end{cases}$$

9*. Производной Шварца (шварцианом) голоморфной функции $w(z)$ называется выражение $S(w;z) := \dfrac{w'''(z)}{w'(z)} - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{w''(z)}{w'(z)}\right)^2$.

а) Доказать, что $S(w;z) = 0$ тогда и только тогда, когда $w(z)$ – дробно-линейная функция.

б) Доказать, что шварцианы взаимно-обратных функций $w(z)$ и $z(w)$ связаны соотношением

$$S(w;z) + S(z;w)\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = 0$$

в) Пусть $w(z)$ и $f(w)$ – голоморфные функции, а $F(z) = f(w(z))$ – их композиция; доказать, что

$$S(F;z) = S(f;w)\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 + S(w;z)$$

Примечание. Все интегралы по замкнутому контуру берутся в положительном направлении (контур обходится против часовой стрелки).