Дискретная математика
Листок 2

ВШЭ, факультет математики
первый курс, третий модуль

Листок можно сдавать до 21.02.2014.

1. Докажите, что при заданном натуральном значении k любое натуральное число n единственным образом представимо в виде

$$n = \binom{b_1}{1} + \binom{b_2}{2} + \dots + \binom{b_k}{k},$$

где $0 \le b_1 < b_2 < \dots < b_k$.

2. Докажите, что для любого многочлена $f(x)$ выполняется равенство $f\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right) x^k = f(k)x^k$.

3. Вычислите три первых ненулевых коэффициента функций, обратных относительно операции подстановки к следующим функциям: $\sin s$, e^s-1, $s+s^2$.

4. Докажите разложение для арксинуса:

$$arcsin(s) = s + \frac{1}{2\cdot 3}s^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}s^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}s^7 + \dots$$

5. Найдите все решения дифференциальных уравнений $F'(s) = aF(s)$, $F'(s) = F^2(s)$ в пространстве формальных степенных рядов.

6. Пусть $A(z) = \sum_{n\ge 0} a_n z^n$, $B(z) = \sum_{n\ge 0} b_n z^n$ и известно, что

$$nb_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k a_k/(n-k)!$$

Выразите $A(z)$ через $B(z)$.

7. Пусть $A(z) = \sum_{n\ge 0} a_n z^n$, $B(z) = \sum_{n\ge 0} b_n z^n$ и известно, что $a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{r+k}{k} b_{n-k}$, где r – целое число. Выразите $A(z)$ через $B(z)$. Вычислите коэффициенты $f_k(r)$ в разложении $b_n = \sum_{k=0}^{n} f_k(r) a_{n-k}$.

8. Вычислите производящую функцию $\ln(1+s)$. Докажите, что

$$\ln((1+s)(1+t)) = \ln(1+s) + \ln(1+t).$$

9. Числа Фибоначчи A_n второго порядка определяются по формуле:

$$A_0 = 0,\ A_1 = 1,\ A_n = A_{n-1} + A_{n-2} + F_n.$$

Выразите A_n через обычные числа Фибоначчи F_n и F_{n+1}.

10. Найдите замкнутое выражение для производящей функции $\sum_{n\ge 0} G_n(z) w^n$, если

$$G_n(z) = \sum_{k\le n/m} \binom{n-mk}{k} z^{mk},$$

m – фиксированное положительное число (начните со случая $m=1$).