Олимпиада для студентов и выпускников вузов — 2012 г.
по направлению «Математика»

Профили:
«Математика»
«Математическая физика»

Время выполения задания — 240 минут

I. ОБЩАЯ ЧАСТЬ

1. Определим последовательность многочленов $g_n(x)$ следующим образом. Положим $g_0(x) = 1$, а многочлен $g_{n+1}(x)$ определим как результат отбрасывания члена с x^{-1} в $(x+x^{-1})g_n(x)$. Например, $g_1(x) = x$, $g_2(x) = 1 + x^2$ и т.д. Найдите $g_{15}(0)$ и $g_{16}(0)$.

1. Let us define a sequence of polynomials $g_n(x)$ in the following way. Set $g_0(x) = 1$, and define the polynomial $g_{n+1}(x)$ as the expression $(x+x^{-1})g_n(x)$, in which the term with x^{-1} is omitted. For example, $g_1(x) = x$, $g_2(x) = 1 + x^2$ etc. Find $g_{15}(0)$ and $g_{16}(0)$.

2. Вычислите интеграл

$$\int e^{x^2+y^2-u^2-v^2} dx\,dy\,du\,dv.$$

по шару радиуса R с центром в 0 в пространстве $\mathbb{R}^4$.

2. Compute the integral

$$\int e^{x^2+y^2-u^2-v^2} dx\,dy\,du\,dv.$$

over the ball of radius R centered at 0 in the space $\mathbb{R}^4$.

3. Найдите наименьшее число $k > 1$, такое, что всякая группа, действующая нетривиально на множестве из четырех элементов, содержит нормальную подгруппу индекса $\leq k$. Говорят, что группа действует *нетривиально*, если не все элементы группы действуют как тождественное преобразование.

3. Find the smallest number $k > 1$ with the following property: every group acting non-trivially on a set with four elements contains a normal subgroup of index $\leq k$. A group action is said to be *non-trivial* if not all elements of the group act as the identity transformation.

4. Найдите наименьшее число собственных подпространств пространства $\mathbb{F}_2^3$, объединение которых совпадает со всем пространством. Здесь $\mathbb{F}_2$ — поле из двух элементов.

4. Find the smallest number of proper subspaces of the space $\mathbb{F}_2^3$, whose union coincides with the entire space. Here $\mathbb{F}_2$ denotes the field with two elements.

5. Найдите хотя бы один многочлен $u(x, y)$ со следующими свойствами:

$$u_x + 2xu_y = 0, \quad u(0,0) = 1, \quad u(0,1) = u(0,2) = u(0,3) = 0.$$

5. Find at least one polynomial $u(x, y)$ with the following properties:

$$u_x + 2xu_y = 0, \quad u(0,0) = 1, \quad u(0,1) = u(0,2) = u(0,3) = 0.$$

II. СПЕЦИАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

В соответствии со своим выбором программы магистерской подготовки выберите и выполните <u>только один</u> из следующих блоков заданий специальной части.

Блок 1. «Математика»

1. Даны два выпуклых многоугольника на плоскости. Всегда ли верно, что всякий гомеоморфизм их внутренностей продолжается до гомеоморфизма замкнутых многоугольников? Строго обоснуйте ответ.

1. Given two convex polygons in the plane, is it always true that any homeomorphism between their interiors extends to a homeomorphism of the closed polygons? Rigorously justify your answer.

Блок 2. «Математическая физика»

1. Точка массы m скользит по гладкой наклонной поверхности без начальной скорости с высоты h. Наклонная поверхность переходит в «мертвую петлю» радиуса R. 1) С какой минимальной высоты h_0 должно стартовать тело, чтобы успешно миновать «мертвую петлю», т.е. не оторваться от ее поверхности? 2) Тот же вопрос при наличии трения. Коэффициент трения равен μ.

1. A point of mass m slides with zero initial speed along a frictionless inclined plane, starting at height h. The inclined plane connects to a vertical loop of radius R. 1) What is the smallest value h_0 of the initial height, for which the point can hold on the loop i.e. do not drop from it? 2) The same question in the case, where there is friction. The friction coefficient is equal to μ.