Листок 8. Функциональные ряды

Анализ, 1 курс, **12.02.2014**

Срок сдачи листка 26 февраля.

Максимальная оценка за листок ставится, если по нему набрано не менее десяти баллов. Сдача решения каждой задачи с ноликом или пункта задачи без нолика дает один балл, задачи со звездочкой — два балла. Кроме того, за каждую несданную задачу с ноликом снимется один балл. Задача с ноликом сдается только целиком, в остальных задачах каждый пункт оценивается отдельно.

8⋄1^0 Докажите, что последовательность ограниченных функций $f_n : X \to \mathbb{R}$ на множестве X равномерно сходится к нулю, если и только если найдется такая числовая последовательность $\alpha_n \to 0$, что $|f_n(x)| \leqslant \alpha_n$ для всех $x \in X$.

8⋄2^0 Приведите пример ряда из неотрицательных функций на отрезке $[0,1]$, такого что
а) функции разрывны, ряд равномерно сходится к непрерывной функции;
б) функции непрерывны, ряд сходится к разрывной функции;
в) функции непрерывны, ряд сходится к непрерывной функции неравномерно.

8⋄3 Пусть ряд $\sum u_n(x)$ сходится равномерно на некотором множестве. Докажите, что расстановкой скобок этот ряд можно преобразовать в ряд, удовлетворяющий признаку Вейерштрасса.

8⋄4 Пусть $a_n \to +\infty$ и пусть ряд $\sum \dfrac{1}{a_n}$ сходится. Докажите, что ряд $\sum \dfrac{1}{x-a_n}$ сходится равномерно на любом компакте, не содержащем точек a_n.

8⋄5 Пусть ряд $\sum a_n$ сходится. Докажите, что на луче $[0,\infty)$ сходятся равномерно ряды
а) $\sum \dfrac{a_n}{n^x}$, б) $\sum a_n e^{-nx}$.

8⋄6 Покажите, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$ и не сходится абсолютно.

8⋄7^0 Приведите примеры степенных рядов с радиусом сходимости $R>0$, которые сходятся на $[-R,R]$, $(-R,R]$, $(-R,R)$.

8⋄8 Может ли степенной ряд сходиться равномерно на $[0,R)$, а в R расходиться?

8⋄9 Пусть степенные ряды $\sum a_n x^n$ и $\sum b_n x^n$ имеют радиусы сходимости $r_1 \neq r_2$.
а) Докажите, что ряд $\sum (a_n+b_n)x^n$ имеет радиус сходимости $\min(r_1,r_2)$;
б) Что можно сказать о радиусе сходимости ряда $\sum (a_n+b_n)x^n$ при $r_1 = r_2$?
в) Докажите, что ряд $\sum a_n b_n x^n$ имеет радиус сходимости $r \geqslant r_1 r_2$.

8⋄10 Докажите, что радиус сходимости степенного ряда $\sum a_n x^n$ может быть найден по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \text{ если предел существует.}$$

8⋄11 Докажите, что если последовательность $a_n(x)$ неотрицательных ограниченных монотонных возрастающих функций $a_n : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ монотонно поточечно сходится к нулю, то ряд $\sum (-1)^n a_n(x)$ равномерно сходится.

8⋄12 Приведите пример бесконечно дифференцируемой функции f, ряд Тейлора которой
(а)^0 сходится всюду, но не к функции f; (б)* расходится в каждой точке, кроме нуля.

8⋄13 Степенной ряд $\sum a_n x^n$ имеет периодические с некоторого места коэффициенты. Докажите, что на некотором невырожденном промежутке этот ряд равномерно сходится к рациональной функции $P(x)/Q(x)$ (где P, Q — многочлены переменной x). Верно ли обратное утверждение?

8⋄14* Докажите, что функция $f(x) = \sum a_n x^n$ является рациональной, если и только если для некоторого ℓ найдутся коэффициенты $b_0, b_1, \ldots, b_\ell$, что для всех достаточно больших m справедливо тождество $b_0 a_m + b_1 a_{m+1} + \ldots + b_\ell a_{m+\ell} = 0$.