

Олимпиада для студентов и выпускников вузов — 2013 г.  
по направлению «Математика»

**Профили:**

«Математика»

«Математическая физика»

**Время выполнения задания — 240 минут**

**I. ОБЩАЯ ЧАСТЬ**

1. Напомним, что *инверсией* перестановки  $\sigma \in S_n$  называется пара  $(i, j)$ ,  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , такая, что  $i < j$ , но  $\sigma(i) > \sigma(j)$ . Найдите суммарное число инверсий у всех перестановок из  $S_n$ , т.е. сумму

$$\sum_{\sigma \in S_n} i(\sigma),$$

где  $i(\sigma)$  — число инверсий перестановки  $\sigma$ .

1. Recall that an *inversion* of a permutation  $\sigma \in S_n$  is by definition a pair  $(i, j)$ ,  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  such that  $i < j$  but  $\sigma(i) > \sigma(j)$ . Find the total number of inversions of all permutations in  $S_n$ , i.e. the sum

$$\sum_{\sigma \in S_n} i(\sigma),$$

where  $i(\sigma)$  is the number of inversions in the permutation  $\sigma$ .

2. Пусть  $A$  — линейный оператор на конечномерном комплексном векторном пространстве  $V$ , такой, что  $A^{2013} = E$ , где  $E$  — единичный оператор. Докажите, что оператор  $A$  диагонализуем.

2. Let  $A$  be a linear operator on a finite dimensional complex vector space  $V$  such that  $A^{2013} = E$ , where  $E$  is the identity operator. Prove that the operator  $A$  is diagonalizable.

3. Пусть  $\mathbb{Q}$  — множество всех рациональных чисел. Верно ли, что пространство  $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$  гомеоморфно пространству  $\mathbb{Q}$ ? Строго обоснуйте ответ.

3. Let  $\mathbb{Q}$  be the set of all rational numbers. Is it true that the space  $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$  is homeomorphic to the space  $\mathbb{Q}$ ? Rigorously justify your answer.

4. Докажите следующее неравенство

$$\int_0^{2\pi} \exp(2\sqrt{t} \cos \phi) d\phi < 2\pi e^t$$

для всех  $t > 0$ .

4. Prove the following inequality:

$$\int_0^{2\pi} \exp(2\sqrt{t} \cos \phi) d\phi < 2\pi e^t$$

for all  $t > 0$ .

## II. СПЕЦИАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

В соответствии со своим выбором программы магистерской подготовки выберите и выполните только один из следующих блоков заданий специальной части.

### Блок 1. «Математика»

1. Пусть  $y_t(x)$  — решение дифференциального уравнения  $y' = y(1 + ye^{-x^2-y^2})$ , удовлетворяющее начальному условию  $y_t(0) = t$ . Докажите, что  $y_t(1)$  определено при всех  $t$ , и найдите  $\frac{d}{dt}y_t(1)$  при  $t = 0$ .

1. Let  $y_t(x)$  be the solution of the differential equation  $y' = y(1 + ye^{-x^2-y^2})$  satisfying the initial condition  $y_t(0) = t$ . Prove that  $y_t(1)$  is defined for all  $t$ , and find  $\frac{d}{dt}y_t(1)$  at  $t = 0$ .

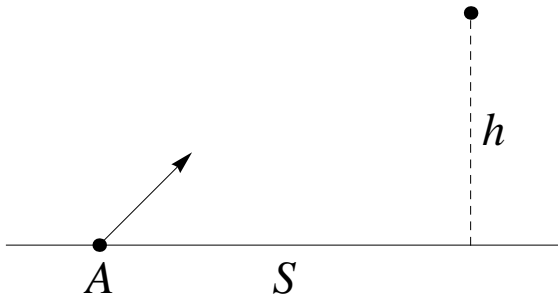
2. Найдите число всех нормальных подгрупп в группе всех симметрий правильного восьмиугольника (включая саму группу и тривиальную подгруппу). Строго обоснуйте ответ.

2. Find the number of all normal subgroups in the group of all symmetries of a regular 8-gon (including the group itself and its trivial subgroup). Rigorously justify your answer.

### Блок 2. «Математическая физика»

1. Из точки  $A$  бросают камень в сторону цели, которая находится на расстоянии  $S$  по горизонтали и  $h$  по вертикали от точки  $A$ . Найдите минимальную величину начальной скорости камня, при которой можно попасть в цель. Сила тяжести направлена вертикально вниз.

1. A stone is shot from a point  $A$  towards a target that is at horizontal distance  $S$  and vertical distance  $h$  from the point  $A$ . Find the minimal value of the initial speed of the stone, with which the stone can hit the target. The force of gravity is directed vertically downwards.



2. В плоскости  $xOy$  может без трения двигаться материальная точка массы  $m$  и заряда  $q$ . На материальную точку действует потенциальная сила с потенциальной энергией  $U(x, y) = m\omega_0^2(x^2 + y^2)/2$  (двумерный гармонический осциллятор). Найдите общее решение уравнений движения осциллятора в случае, когда он помещен в постоянное и однородное магнитное поле, направленное вдоль оси  $Oz$ :  $\vec{H} = (0, 0, H)$ .

2. A material point of mass  $m$  and of electric charge  $q$  can move in the plane  $xOy$  without friction. The point  $m$  is under the action of a potential force with the potential energy  $U(x, y) = m\omega_0^2(x^2 + y^2)/2$  (a two dimensional harmonic oscillator). Solve the equations of motion for the oscillator in the case when there is a constant homogeneous magnetic field directed along the  $Oz$  axis:  $\vec{H} = (0, 0, H)$ .