

Коллоквиум по анализу для 1 курса. 24 февраля 2014, тема: «Ряды»

Каждому студенту дается 3 вопроса. Каждый из трех вопросов оценивается от 0 до 3.

3 — все рассказано чисто с первого раза; 2 — все рассказано с первого раза с мелкими математическими погрешностями; 1 — в первоначальном рассказе была существенная ошибка (пробел в доказательстве), но потом (возможно, после обсуждения) вопрос был рассказан правильно; дополнительный вопрос — надо ответить «схodu», формулировка теоретического вопроса, сходимость-расходимость ряда, который надо знать «на память». Дает дополнительно 1–2 балла. **За 9 баллов по 3м вопросам дается бонусный балл.**

Вопросы

1. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши для числовых последовательностей.
2. Эквивалентность двух определений полноты метрических пространств (через фундаментальные последовательности и через вложенные шары).
3. Полнота пространства $M(G)$ ограниченных функций.
4. Замкнутость пространства $C(K)$ в пространстве $M(K)$, где K — метрический компакт.
5. Критерий Коши, необходимое условие сходимости ряда. Абсолютно сходящийся ряд сходится.
6. Сходимость ряда с положительными членами эквивалентна ограниченности множества его частичных сумм.
7. $a_n, b_n > 0$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Из сходимости ряда $\sum b_n$ вытекает сходимость ряда $\sum a_n$, из расходимости ряда $\sum a_n$ вытекает расходимость ряда $\sum b_n$.
8. $a_n, b_n > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0$. Тогда ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ сходятся и расходятся одновременно.
9. $a_n > 0$, $a_n \rightarrow 0$ монотонная. Ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ сходятся или расходятся одновременно.
10. Признак Даламбера сходимости числовых рядов.
11. Признак Коши сходимости числовых рядов.
12. Признак Раабе сходимости числовых рядов.
13. $\sum a_n$, $a_n > 0$, $a_n \rightarrow 0$ расходится $\Rightarrow \exists b_n : b_n > 0$, $b_n \rightarrow 0$, что ряд $\sum a_n b_n$ также расходится.
14. $\sum a_n$, $a_n > 0$, $a_n \rightarrow 0$ сходится $\Rightarrow \exists b_n \rightarrow +\infty$, что ряд $\sum a_n b_n$ также сходится.
15. Интегральный признак сходимости ряда.
16. В абсолютно сходящемся ряде от перестановке мест слагаемых сумма не меняется.
17. Теорема Римана о перестановках членов условно сходящегося ряда.
18. Признак Лейбница сходимости знакопередающегося ряда.
19. Тожество Абеля, признаки Дирихле и Абеля сходимости числовых рядов.
20. Произведение рядов.
21. Функциональные ряды, равномерная и поточечная сходимость, признак Коши равномерной сходимости.
22. Признак Вейерштрасса (мажорантный признак равномерной сходимости).
23. Теорема Дини (функциональный ряд с неотрицательными непрерывными функциями, сходящийся поточечно к непрерывной функции, сходится равномерно).
24. Признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости.
25. Теорема о перестановке ряда и предела.
26. Степенные ряды, радиус сходимости, лемма и формула Коши-Адамара.
27. Ряд Тейлора, его сходимость, оценка остаточного члена для e^x , $\sin x$, $\cos x \ln(1+x)$, $\arctg x$.
28. Суммирование расходящихся рядов
29. Двойные и повторные ряды.
30. Бесконечные произведения — определение, признаки сходимости.