

Дискретная математика

Семинар 5

ВШЭ, факультет математики

первый курс, третий модуль

1. Пусть $A(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots$ – производящая функция для последовательности $a_0, a_1, a_2, \dots$. Найдите производящие функции для последовательностей:

а). $a_0 + a_1, a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots$;

б). $a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \dots$;

в). $a_0, a_1b, a_2b^2, a_3b^3, \dots$;

г). $a_0, a_2, a_4, a_6, \dots$.

2. Пользуясь производящей функцией для чисел Фибоначчи, докажите для них тождества:

а). $F_0 + F_1 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$;

б). $F_0 + F_2 + \dots + F_{2n} = F_{2n+1}$;

в). $F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n} - 1$;

г). $F_0^2 + F_1^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$.

3. Рекуррентное правило образования последовательности Фибоначчи позволяет продолжить ее “назад”, т.е. для отрицательных значений индекса. Так, например, $F_{-1} = 0$. Чему равно F_{-10} ?

4. Найдите производящую функцию для чисел Фибоначчи с чётными номерами.

5. Найдите представление в виде суммы элементарных дробей следующих рациональных функций:

$$\frac{1}{1-s-2s^2}; \quad \frac{1+2s}{1-3s-4s^2}; \quad \frac{1+2s}{1-3s^3}.$$

6. Найдите производящую функцию для последовательности, заданной линейным рекуррентным соотношением $a_{n+1} = 2a_n - 1$.