ТФКП-2014

Листок **3**

срок сдачи 14.03.2014

1. Докажите, что если функция f голоморфна в проколотой окрестности точки a и имеет в точке a полюс, то a – существенно особая точка для функции e^f.

2. Пусть $B_1 \subset B_2$ – открытые круги с общим центром. Докажите, что всякую функцию, голоморфную в кольце $B_2 \setminus \overline{B_1}$, можно представить как сумму двух функций, одна из которых голоморфна в B_2, а другая в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{B_1}$. Опишите неоднозначность такого разложения.

3. Пусть функция f голоморфно и взаимно однозначно отображает внешность единичного круга $|z| > 1$ на некоторую область $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ и имеет разложение в ряд Лорана вида

$$f(z) = z + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \frac{c_3}{z^3} + \dots$$

Докажите, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n|c_n|^2 \leq 1$ и укажите геометрический смысл этого неравенства.

4. Вычислите следующие интегралы, используя вычеты: а) $\int_\gamma \frac{dz}{\sin^2 z \cos z}$ вдоль окружности $\gamma = \Big\{z \ : \ |z| = 10\Big\}$, проходимой против часовой стрелки, б) $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx$, в) $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\, dx$, г) $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(x+1)}$, д) $\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\log x}{x^2+1}\, dx$ при $0 < \alpha < 1$.

5. Фиксируем $\tau \in \mathbb{C}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ такие, что $\operatorname{Im} \tau > 0$, $0 \leq \alpha, \beta < 1$. Для любого натурального $n \geq 1$ рассмотрим линейное пространство $\Theta^{(n)}_{\alpha,\beta}$ целых функций, удовлетворяющих условиям

$$f(z+1) = e^{2\pi i \alpha} f(z)\,, \qquad f(z+\tau) = e^{-\pi i n \tau - 2\pi i n z - 2\pi i \beta} f(z).$$

Они называются тета-функциями порядка n с характеристиками α, β.

а) Докажите, что $\dim \Theta^{(n)}_{\alpha,\beta} = n$.

б) Рассмотрим подпространство $\Theta^{(n)+}_{0,0} \subset \Theta^{(n)}_{0,0}$ четных тета-функций с нулевыми характеристиками; докажите, что $\dim \Theta^{(n)+}_{0,0} = \frac{1}{2}(n+2)$ для четных n и $\frac{1}{2}(n+1)$ для нечетных.

6. Фиксируем $\tau \in \mathbb{C}$ такое, что $\operatorname{Im} \tau > 0$, и определим функцию $\theta_1(z|\tau)$ рядом

$$\theta_1(z|\tau) = -\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{\pi i \tau (k+\frac{1}{2})^2 + 2\pi i (k+\frac{1}{2})(z+\frac{1}{2})}$$

(для краткости будем писать $\theta_1(z|\tau) = \theta_1(z)$).

а) Докажите, что $\theta_1(z) \in \Theta^{(1)}_{1/2,1/2}$, т.е.

$$\theta_1(z+1|\tau) = -\theta_1(z|\tau), \qquad \theta_1(z+\tau|\tau) = -e^{\pi i\tau - 2\pi i z}\theta_1(z|\tau).$$

б) Докажите, что нули функции $\theta_1(z)$ простые и расположены в точках $N + M\tau$, $N, M \in \mathbb{Z}$.

в) При каких соотношениях на параметры $a_i, b_i \in \mathbb{C}$ функция

$$f(z) = \frac{\theta_1(z-a_1)\,\theta_1(z-a_2)\ldots\theta_1(z-a_m)}{\theta_1(z-b_1)\,\theta_1(z-b_2)\ldots\theta_1(z-b_n)}$$

будет двоякопериодической в комплексной плоскости?

г)* Докажите тождество

$$\theta_1(v+y)\theta_1(v-y)\theta_1(z+u)\theta_1(z-u) - \theta_1(u+y)\theta_1(u-y)\theta_1(z+v)\theta_1(z-v)$$
$$+\ \theta_1(u+v)\theta_1(u-v)\theta_1(z+y)\theta_1(z-y)\ =\ 0$$

(*Указание:* воспользоваться тем, что $\theta_1(z+a)\theta_1(z-a) \in \Theta^{(2)}_{0,0}$.)

д)* Докажите, что функция $\theta_1(z)$ разлагается в бесконечное произведение

$$\theta_1(z) = 2q^{\frac{1}{4}}\sin(\pi z)\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-q^{2n}e^{2\pi i z})(1-q^{2n}e^{-2\pi i z})\,,$$

где $q = e^{\pi i\tau}$.