

## ЛИСТОК 4. МЕТОД ФУРЬЕ

УРЧП, 3-4 КУРС, 27.02.2014

4◊1 Решите задачи Штурма-Лиувилля

а)  $y'' - \lambda y = 0, \quad y'(0) = y'(l) = 0;$

б)  $y'' - \lambda y = 0, \quad y(0) = y'(l) = 0.$

4◊2 Решите смешанную начально-краевую задачу

$$\begin{cases} u_t + u = u_{xx}, & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = 1. \end{cases}$$

4◊3 Решите смешанную начально-краевую задачу

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = t, \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

4◊4 Решите задачу Дирихле в круге

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u|_{r=1} = \cos^2 \varphi \end{cases}$$

4◊5 Постройте функцию Грина оператора  $L = -\frac{d^2}{dx^2} + 1$  с граничными условиями  $u'(0) = u'(l) = 0$ .

4◊6 Пусть  $u(x, t)$  – решение в  $[0, 1] \times [0, +\infty]$  смешанной задачи

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = x^2(1 - x).$$

Найдите  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^1 [u_t^2(x, t) + u_x^2(x, t)] dx$ .

4◊7 Пусть  $u(x, t)$  – решение в  $[0, \pi] \times [0, +\infty]$  смешанной задачи

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad u(x, 0) = \sin^{100} x, \quad u_t(x, 0) = 0.$$

Верно ли, что  $|u_t(x, \frac{\pi}{2})| > 100$  на множестве, мера которого больше 1?