Алгебра-2 (матфак ВШЭ 2013-2014): расширения полей, листок 3

Срок сдачи листка 18 марта (просроченная задача оценивается как ползадачи, сданные в срок). Каждый пункт оценивается отдельно (а теорвопрос, как обычно, в 2 пункта).

1 Пусть поле L конечное расширение поля K. Докажите, что $|Aut_K L| \leq [L : K]$. В каком случае достигается равенство и почему?

2 Пусть E расширение Галуа F, а $P \in F[x]$ неприводим над F. Покажите, что все неприводимые сомножители P над E имеют одну и ту же степень.

3 Пусть K поле разложения $X^4 - 2$ над $\mathbb{Q}$, и $G = Gal(K/\mathbb{Q})$.

а) Покажите, что $G \cong D_4$, и найдите неподвижное подполе K^C, где C центр G.

б) Какие подгруппы порядка 4 есть в G? Опишите квадратичные расширения $\mathbb{Q}$, содержащиеся в K.

в) Опишите подрасширения K степени 4 над $\mathbb{Q}$. Какие из них - расширения Галуа?

4 а) Пусть F поле характеристики $\neq 2$ и E расширение Галуа степени 4 над F. Докажите, что имеется квадратичное над F подрасширение $K \subset E$, и что существуют такие $a, b, \epsilon \in F$, что $E = F(\sqrt{a + b\sqrt{\epsilon}})$.

б) Пусть теперь $a, b, \epsilon \in F$ таковы, что $\sqrt{\epsilon} \notin F$ и $\sqrt{a + b\sqrt{\epsilon}} \notin F(\sqrt{\epsilon})$. Покажите, что $E = F(\sqrt{a + b\sqrt{\epsilon}})$ нормально над F тогда и только тогда, когда $a^2 - \epsilon b^2$ является квадратом в $F(\sqrt{\epsilon})$.

в) Выведите отсюда, что если E расширение Галуа F, то $a^2 - \epsilon b^2 = u^2$ или $a^2 - \epsilon b^2 = \epsilon u^2$ для некоторого $u \in F$, и укажите группу Галуа в каждом из этих двух случаев.

5 С помощью теории Галуа покажем, что $\mathbb{C}$ алгебраически замкнуто. Из анализа используем только теорему о промежуточном значении: из нее следует, что любой многочлен нечетной степени в $\mathbb{R}[X]$ имеет корень в $\mathbb{R}$. Пусть K - конечное расширение Галуа $\mathbb{R}$, содержащее $\mathbb{C}$, и $G = Gal(K/\mathbb{R})$.

а) Покажите, что порядок G - степень двойки и выведите из этого, что в $Gal(K/\mathbb{C})$, если она нетривиальна, есть подгруппа индекса 2.

б) Покажите, что $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$ не имеет расширений степени 2, и выведите отсюда, что $\mathbb{C}$ алгебраически замкнуто.

6 а) Пусть p простое число, K поле характеристики p. Обозначим $\Phi : K \to K$ отображение $\Phi(x) = x^p - x$, и пусть L_a ($a \in K$) поле разложения $X^p - X - a$. Покажите, что $L_a = L_b$ тогда и только тогда, когда существует такой $l \in \mathbb{F}_p^*$, что $b - al \in Im\Phi$ (указание: посмотрите на действие группы Галуа на корнях соответствующих многочленов).

б) Пусть теперь $char(K) \neq p$, и K содержит все корни $X^p - 1$. Пусть M_a $(a \in K^*)$ поле разложения $X^p - a$. Покажите, что $M_a = M_b$ $(b \in K^*)$ тогда и только тогда, когда существует такое целое l, $(l, p) = 1$, что $\frac{b}{a^l}$ – p-я степень в K.