Листок 9. Интегралы

Анализ, 1 курс, **06.03.2014**

Срок сдачи листка 12 марта.

Листок состоит из двух страниц

Максимальная оценка за листок ставится, если по нему набрано не менее десяти баллов. Сдача решения каждой задачи с ноликом или пункта задачи без нолика дает один балл, задачи со звездочкой — два балла. Кроме того, за каждую несданную задачу с ноликом снимется один балл. Задача с ноликом сдается только целиком, в остальных задачах каждый пункт оценивается отдельно.

9◇1^0 Пусть функция f интегрируема на каждом конечном отрезке. Положим при каждом $\delta > 0$

$$F_\delta(x) = \frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)\,dt.$$

а) Докажите, что функция $F_\delta \in C(\mathbb{R})$ при каждом $\delta > 0$.
б) Докажите, что если $f \in C(\mathbb{R})$, то $F_\delta \in C^1(\mathbb{R})$.
в) Докажите, что если $f \in C(\mathbb{R})$, то

$$\forall [a,b] \subset \mathbb{R} \text{ и } \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta_0 > 0, \text{ такое что } \forall \delta \in (0,\delta_0) \text{ и } \forall x \in [a,b] \text{ справедливо } |f(x) - F_\delta(x)| < \varepsilon.$$

9◇2^0 Покажите, что если $f \in C^1[a,b]$, то f может быть представлена как разность двух неубывающих функций.

9◇3 Покажите, что функция f интегрируема по Риману на интервале (a,b), если и только если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что для любых двух разбиений τ_1 и τ_2 мелкости меньшей δ для соответствующих интегральных сумм $\sigma(f,\tau_1,\xi)$ и $\sigma(f,\tau_2,\eta)$ справедливо неравенство $|\sigma(f,\tau_1,\xi) - \sigma(f,\tau_2,\eta)| < \varepsilon$ (аналог критерия Коши).

9◇4^0 Пусть $f, g \in C[a,b]$. Докажите, что

$$\lim_{\lambda(\tau)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) g(\theta_i) |\Delta_i| = \int\limits_a^b f(x) g(x)\,dx,$$

где предел берётся по всем разбиениям τ, длина которых стремится к нулю, а $\xi_i, \theta_i \in \Delta_i$ — произвольные точки на отрезках разбиения.

9◇5 Пусть функция f ограничена и монотонна на $[0,1]$. Докажите, что

$$\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right) \text{ при } n \to \infty.$$

9◇6 Пусть $f \in C^1[a,b]$, и $x \in (a,b)$. Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(f\left(x + \frac{k}{n^2+k^2}\right) - f(x) \right) = f'(x)\ln\sqrt{2}.$$

9◇7 а) Докажите, что для $f \in C[0,1]$ выполнено равенство $\displaystyle\int_0^\pi x\,f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,dx$.

б) Посчитайте $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$.

9◇8 Пусть $f \in C[0,1]$ — положительная функция. Докажите равенство

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right) f\left(\frac{2}{n}\right) \dots f\left(\frac{n}{n}\right)} = \exp\Bigl(\int_0^1 \ln f(x)dx\Bigr).$$

9◇9 Докажите равенство $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{t}{\sin t}dt.$

9◇10^0 Докажите, что при $g, h \in C[a,b]$ справедливо неравенство

$$\Bigl(\int_a^b g(x)h(x)dx\Bigr)^2 \leqslant \int_a^b \bigl(g(x)\bigr)^2 dx \cdot \int_a^b \bigl(h(x)\bigr)^2 dx.$$

9◇11 Пусть $f \in C^1[a,b]$, такая что $f(a) = 0$. Докажите, что

$$\max_{x\in[a,b]} |f|^2 \leqslant (b-a)\int_a^b |f'(x)|^2 dx.$$

9◇12 Пусть $f \in C[-a,a]$ — четная функция. Докажите, что

$$\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+e^x}dx = \int_0^a f(x)dx.$$

9◇13 Определите все непрерывные на $[0,+\infty)$ и положительные на $(0,+\infty)$ функции, удовлетворяющие условию $2x\displaystyle\int_0^x f(t)dt \equiv f(x)$.

9◇14 Пусть f — многочлен, а $m < n$ — целые числа. Докажите формулу Эйлера–Маклорена

$$\sum_{k=m}^n f(k) = \int_m^n f(x)dx + \sum_{i=1}^\infty \frac{B_i}{i!}\left(f^{(i-1)}(n) - f^{(i-1)}(m)\right),$$

где через B_i обозначаются числа Бернулли. (Числа Бернулли можно определить с помощью ряда Тейлора:

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 + \sum_{i=1}^\infty \frac{B_i}{i!}z^i.)$$

9◇15* Вычислите интегралы $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$ и $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$ при целых неотрицательных n и докажите формулу Валлиса

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^\infty \frac{4k^2}{4k^2-1}$$

9◇16** Пусть $f \in C[0,1]$ удовлетворяет при всех $x, y \in [0,1]$ неравенству $xf(y) + yf(x) \leqslant 1$.

а) Докажите, что $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx \leqslant \frac{\pi}{4}$.

б) Докажите, что константа $\pi/4$ неулучшаема: найдите f, на которой неравенство обращается в равенство.

9◇17** Пусть $f, g : [0,1] \to [0,1]$, $f, g \in C[0,1]$, причем f — строго возрастает. Докажите, что

$$\int_0^1 f(g(x))dx \leqslant \int_0^1 (f(x) + g(x))dx.$$