Задачи, после номера которых стоит буква “B”, не являются обязательными. Решившие их получат бонусные баллы.

8.1. Для каждого из следующих операторов T найдите их (гильбертово) сопряженные:
(a) диагональный оператор в ℓ^2;
(b) оператор умножения на ограниченную измеримую функцию в $L^2(X,\mu)$;
(c) операторы левого и правого сдвига в ℓ^2;
(d) оператор двустороннего сдвига в $\ell^2(\mathbb{Z})$;
(e) интегральный оператор Гильберта–Шмидта в $L^2(X,\mu)$ (см. задачу 2.14);
(f) оператор T в $L^2[0,1]$, действующий по формуле

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Определение 8.1. Ограниченный линейный оператор T в гильбертовом пространстве называется *нормальным*, если $TT^* = T^*T$.

8.2. Какие из операторов предыдущей задачи (кроме п. (e)) самосопряженные? унитарные? нормальные? являются ортогональными проекторами?

8.3. Докажите, что
(a) каждый непустой компакт $K \subset \mathbb{C}$ является спектром некоторого нормального оператора в сепарабельном гильбертовом пространстве;
(b) каждый непустой компакт $K \subset \mathbb{R}$ является спектром некоторого самосопряженного оператора в сепарабельном гильбертовом пространстве;
(c) каждый непустой компакт $K \subseteq \mathbb{T}$ является спектром некоторого унитарного оператора в сепарабельном гильбертовом пространстве.

8.4-B. Что можно сказать про спектр изометрии в гильбертовом пространстве?

8.5. Вычислите норму оператора из п. (f) задачи 8.1.
Указание: оператор T^*T компактен и самосопряжен.

8.6. (a) Докажите, что оператор $T \in \mathscr{B}(H)$ нормален тогда и только тогда, когда $\|Tx\| = \|T^*x\|$ для всех $x \in H$.
(b) Докажите, что если оператор $T \in \mathscr{B}(H)$ нормален, то $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^*$ и $H = \operatorname{Ker} T \oplus \overline{\operatorname{Im} T}$ (ортогональная прямая сумма).

8.7. Докажите, что собственные векторы нормального оператора, отвечающие разным собственным значениям, ортогональны.

8.8. Пусть T — нормальный оператор в гильбертовом пространстве. Докажите, что $r(T) = \|T\|$.
Указание: оператор T^*T самосопряжен.

8.9. Пусть $T \in \mathscr{B}(H)$ — нормальный оператор и $H_0 \subseteq H$ — замкнутое T-инвариантное подпространство. Обязательно ли $H_0^\perp$ T-инвариантно?

8.10-B. Обобщите теорему Гильберта-Шмидта на случай компактных нормальных операторов.

8.11-B (*эргодическая теорема фон Неймана*)**.** Пусть U — изометрия в гильбертовом пространстве H, и пусть P — ортогональный проектор на $\operatorname{Ker}(U - \mathbf{1})$. Докажите, что

$$Px = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U^k x \qquad (x \in H).$$

Указание: сначала докажите, что $\operatorname{Ker}(U - \mathbf{1}) = \operatorname{Ker}(U^* - \mathbf{1})$.