ТФКП-2014

Листок 4

срок сдачи 12.04.2014

1. Пусть D – произвольная область, $\gamma \subset D$ – спрямляемая кривая, f – функция, голоморфная в $D \setminus \gamma$ и непрерывная в D. Докажите, что f голоморфна в D.

2. Постройте мероморфную функцию в $\mathbb{C}$, которая не принимает ровно два значения $a, b \in \mathbb{C}$.

3. Существует ли конформная биекция $f : U \to U$ (U – единичный круг), такая, что $f(0) = \frac{1}{2}$ и $f(\frac{1}{2}) = \frac{7}{8}$?

4. Найдите вычеты ветвей функции $\exp\left(\frac{1}{1+\sqrt{z}}\right)$ в точке $z = 1$.

5. Найдите род римановой поверхности многозначной аналитической функции: а) $f(z) = \sqrt{(z^4-1)(z-1)}$, б) $f(z) = \sqrt{\dfrac{z^2-1}{z^2+1}}$, в) $f(z) = \sqrt[n]{1-z^n}$.

6. Вычислите следующие интегралы:

а) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x+1}\,dx, \quad 0 < \alpha < 1,$

б) $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^\alpha \frac{dx}{1+x}\,, \quad -1 < \alpha < 1,$

в) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(1+x)^3}\,dx.$

7. Гамма-функция[1] $\Gamma(z)$ определяется при $\operatorname{Re} z > 0$ формулой $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt$.

а) Докажите основное свойство гамма-функции $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$ при $\operatorname{Re} z > 0$ и вычислите $\Gamma(n)$ при $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

б) Докажите, что функция $\Gamma(z)$ может быть аналитически продолжена до голоморфной функции на $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\le 0}$, имеющей в каждой точке $z = -n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) простой полюс с вычетом $(-1)^n/n!$.

в) Докажите, что функцию $1/\Gamma(z)$ можно представить в виде бесконечного произведения
$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{k=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k}\right],$$
где $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n\right) = 0,5772\ldots$ – постоянная Эйлера.

---

[1] В этом году исполняется 200 лет обозначению $\Gamma(z)$ для этой функции, введенному Лежандром.

г) Докажите тождество

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}\,.$$

Найдите $\Gamma(n + \frac{1}{2})$ при произвольном $n \in \mathbb{Z}$.