

ЛИСТОК 10. ЗАДАЧИ ИЗ МЕХАНИКИ И ФИЗИКИ

Анализ, 1 курс, 31.03.2014

Срок сдачи листка 16 апреля.

Максимальная оценка за листок ставится, если по нему набрано не менее десяти баллов. Сдача решения каждой задачи дает один балл.

- 10◊1** В параболическую тарелку (параболоид вращения в \mathbb{R}^3 с вертикальной осью) высоты h и радиуса R подали обед. Сколько супа в неё влезет?
- 10◊2** По трубе радиуса R течёт нефть, причём скорость течения растёт прямо пропорционально расстоянию от стенки трубы, достигая максимального значения v_0 м/сек в середине трубы. Какова пропускная способность этой трубы?
- 10◊3** Момент вращения отрезка $I = [0, 1]$ с непостоянной плотностью $\rho(x) = x^s$ (где $s > 0$) относительно точки $a \in \mathbb{R}$ вычисляется по формуле

$$J_a = \int_0^1 \rho(x) (x - a)^2 dx.$$

Найдите минимальное значение момента вращения J_a и соответствующую точку a^* .

- 10◊4** Винт вертолётa, взлетающего с постоянной скоростью v , вращается с постоянной угловой скоростью ω . По лопасти винта от его оси бежит колорадский жук с постоянной скоростью u . Найдите длину траектории колорадского жука за один полный оборот винта вертолётa, если в начальный момент времени он сидел на оси винта.
- 10◊5** Найдите работу силы Архимеда при погружении золотого шара радиуса R в ванну с водой до середины шара. (Примечание: Требуется работа, а не сила!)
- 10◊6** Определите силу давления воды на вертикальную стенку, имеющую форму полукруга радиуса a , диаметр которого находится на поверхности воды.
- 10◊7** Циклоидой называется траектория фиксированной точки на окружности радиуса R катящейся без скольжения по прямой. Найдите параметризацию циклоиды и длину её дуги, отвечающей полному обороту окружности.
- 10◊8** Цилиндр диаметра 20 см и длины 80 см заполнен паром под давлением 10 кг/см². Какую работу надо затратить, чтобы уменьшить объём пара в два раза, считая, что температура пара остаётся постоянной?
- 10◊9** Докажите первую теорему Гульдена: площадь поверхности, образованной вращением плоской дуги C вокруг не пересекающей её оси, лежащей в плоскости дуги, равна длине этой дуги, умноженной на длину окружности, описываемой центром тяжести дуги C .
- 10◊10** Докажите вторую теорему Гульдена: объём тела, образованного вращением плоской фигуры S вокруг не пересекающей её оси, расположенной в плоскости фигуры, равен произведению площади фигуры S на длину окружности, описываемой центром тяжести этой фигуры.