

## Листок 10. ЗАДАЧИ ИЗ МЕХАНИКИ И ФИЗИКИ

Анализ, 1 курс, 31.03.2014

Срок сдачи листка 16 апреля.

Максимальная оценка за листок ставится, если по нему набрано не менее десяти баллов. Сдача решения каждой задачи дает один балл.

- 10◊1** В параболическую тарелку (параболоид вращения в  $\mathbb{R}^3$  с вертикальной осью) высоты  $h$  и радиуса  $R$  подали обед. Сколько супа в неё влезет?
- 10◊2** По трубе радиуса  $R$  течёт нефть, причём скорость течения растёт прямо пропорционально расстоянию от стенки трубы, достигая максимального значения  $v_0$  м/сек в середине трубы. Какова пропускная способность этой трубы?
- 10◊3** Момент вращения отрезка  $I = [0, 1]$  с непостоянной плотностью  $\rho(x) = x^s$  (где  $s > 0$ ) относительно точки  $a \in \mathbb{R}$  вычисляется по формуле

$$J_a = \int_0^1 \rho(x) (x - a)^2 dx.$$

Найдите минимальное значение момента вращения  $J_a$  и соответствующую точку  $a^*$ .

- 10◊4** Винт вертолёт, взлетающего с постоянной скоростью  $v$ , вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . По лопасти винта от его оси бежит колорадский жук с постоянной скоростью  $u$ . Найдите длину траектории колорадского жука за один полный оборот винта вертолёт, если в начальный момент времени он сидел на оси винта.
- 10◊5** Найдите работу силы Архимеда при погружении золотого шара радиуса  $R$  в ванну с водой до середины шара. (Примечание: Требуется работа, а не сила!)
- 10◊6** Определите силу давления воды на вертикальную стенку, имеющую форму полукруга радиуса  $a$ , диаметр которого находится на поверхности воды.
- 10◊7** Циклоидой называется траектория фиксированной точки на окружности радиуса  $R$  катящейся без скольжения по прямой. Найдите параметризацию циклоиды и длину её дуги, отвечающей полному обороту окружности.
- 10◊8** Цилиндр диаметра 20 см и длины 80 см заполнен паром под давлением 10 кг/см<sup>2</sup>. Какую работу надо затратить, чтобы уменьшить объём пара в два раза, считая, что температура пара остаётся постоянной?
- 10◊9** Бокал в форме поверхности вращения радиуса  $R(z) = z^{2/3}$  на высоте  $z$  ото дна наполняют из постепенно иссякаемого источника, скорость истечения из которого равна  $\cos^2(t)/e^t$ . До какой высоты  $H$  сможет наполниться бокал?
- 10◊10** Докажите вторую теорему Гульдена: объём тела, образованного вращением плоской фигуры  $S$  вокруг не пересекающей её оси, расположенной в плоскости фигуры, равен произведению площади фигуры  $S$  на длину окружности, описываемой центром тяжести этой фигуры.