Задачи для семинара 1

Решения некоторых задач (по выбору преподавателей и студентов) обсуждаются на семинарах. Остальные задачи рекомендуется решать дома для лучшего понимания лекций.

1.1. Приведите пример идеала, не являющегося главным, в кольце: **а)** $\mathbb{K}[x, y]$; **б)** $\mathbb{Z}[x]$.

1.2. Покажите, что в евклидовом кольце с функцией нормы $n\colon A \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ равенство $n(ab) = n(a)$ равносильно тому, что элемент b обратим.

1.3. Постройте изоморфизм колец $\mathbb{Z}/(7) \oplus \mathbb{Z}/(11)\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/(77)$: для каждой пары остатков (a, b) укажите такое число x, что $x \equiv a \mod 7$ и $x \equiv b \mod 11$.

1.4. Пусть $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 - x + 1$. Постройте изоморфизм колец $\mathbb{R}[x]/(f) \oplus \mathbb{R}[x]/(g) \to \mathbb{R}[x]/(fg)$: для любой пары многочленов $(a(x), b(x))$ найдите такой многочлен $h(x)$, что $h(x) \equiv a(x) \mod f(x)$ и $h(x) \equiv b(x) \mod g(x)$.

1.5. Убедитесь, что 2, $\sqrt{5} + 1$ и $\sqrt{5} - 1$ неприводимы и попарно не ассоциированы в кольце $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$. Отсюда будет следовать, что $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ не факториально: действительно, $4 = 2 \cdot 2 = (\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)$.

1.6. Конечно ли факторкольцо $\mathbb{Z}[x]/(f, g)$, если все общие делители многочленов $f(x)$ и $g(x)$ исчерпываются ± 1?

1.7. Найдите все идеалы в кольце формальных степенных рядов $\mathbb{K}[[x]]$. Является ли оно кольцом главных идеалов? Как устроены включения между идеалами?