Домашнее задание 1

1.0. Прежде чем решать остальные задачки, убедитесь, что вы помните всю теорию, рассказывавшуюся в первом семестре и относящуюся к кольцам, идеалам, факторкольцам, гомоморфизмам колец и т.д.[1]

1.1. Постройте изоморфизм колец $\mathbb{Z}/(57) \oplus \mathbb{Z}/(43)\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/(57 \cdot 43)$: для каждой пары остатков (a, b) укажите такое число x, что $x \equiv a \mod 57$ и $x \equiv b \mod 43$.

1.2. Пусть $f(x) = x^2 + x + 1$, $g(x) = x^2 - 1$. Постройте изоморфизм колец $\mathbb{R}[x]/(f) \oplus \mathbb{R}[x]/(g) \to \mathbb{R}[x]/(fg)$: для любой пары многочленов $(a(x), b(x))$ найдите такой многочлен $h(x)$, что $h(x) \equiv a(x) \mod f(x)$ и $h(x) \equiv b(x) \mod g(x)$.

1.3. Найдите все обратимые элементы в кольце $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

1.4. Покажите, что для любого идеала $I \subset A$ его *радикал*

$$\sqrt{I} = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} \colon x^n \in I\}$$

является идеалом в A, содержащим I. Приведите пример, когда $\sqrt{I} \neq I$.

1.5. Пусть A — произвольное кольцо. Собственный (т.е. отличный от всего кольца) идеал $I \subset A$ называется *максимальным*, если он не содержится ни в каком строго большем собственном идеале. Докажите, что I максимальный тогда и только тогда, когда A/I — поле.

Пожалуйста, пишите разборчиво или набирайте в TeXe.

[1] Эту задачу не надо записывать и сдавать ;-).