Домашнее задание 8 (бонусное)

Напомним, что *отражением* относительно вектора w в евклидовом пространстве V называется ортогональное преобразование $s_w\colon V \to V$, переводящее w в $-w$ и сохраняющее (поточечно) плоскость $\langle w\rangle^\perp$.

8.0. Вычислите $s_w(v)$.

8.1. Пусть $\mathbb{H}$ — тело кватернионов со стандартным скалярным произведением, $\alpha \in \mathrm{SU}(2)$. Докажите, что отражение $s_\alpha\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ относительно α записывается формулой

$$s_\alpha(q) = -\alpha\bar{q}\alpha.$$

8.2. Пусть $G \subset \mathrm{SU}(2)$ — конечная подгруппа чётного порядка. Докажите, что $s_\alpha(q) \in G$ для любого $q \in G$ (то есть все отражения относительно элементов из G переводят G в себя).

Указание. Попробуйте доказать, что $-1 \in G$.

8.3 (Двулистное накрытие $\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(4)$). Пусть $(z, w) \in \mathrm{SU}(2)\times\mathrm{SU}(2)$. Свяжем с этой парой кватернионов линейное преобразование $R_{(z,w)}\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, определенное по формуле

$$R_{(z,w)}(q) = zqw^{-1}.$$

а) Докажите, что $R_{(z,w)}$ есть ортогональное преобразование пространства $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$.

б) Докажите, что отображение $(z, w) \mapsto R_{(z,w)}$ определяет гомоморфизм групп $R\colon\ \mathrm{SU}(2)\times \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{O}(4)$.

в) Найдите ядро отображения R.

г) Найдите образ отображения R.

Указание. Это можно доказывать по-разному: например, можно использовать канонический вид ортогонального преобразования или представимость каждого движения в виде композиции нескольких отражений.

Это домашнее задание является дополнительным (бонусным). Пожалуйста, пишите разборчиво или набирайте в TeXе.