

Домашнее задание 6

Везде, где это не указано явно, пространство V предполагается евклидовым (в частности, вещественным).

6.1. Убедитесь, что в следующих двух парах форм одна является положительно определенной; найдите невырожденное линейное преобразование, приводящее эту форму к нормальному виду (т.е. с единичной матрицей), а вторую — к диагональному виду:

$$f(x) = x^2 + 10xy + 26y^2; \quad g(x) = x^2 + 16xy + 56y^2.$$

6.2. Найдите канонический вид ортогональной матрицы и ортонормированный базис, в котором матрица имеет такой вид.

$$\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

6.3. Докажите, что оператор, заданный в некотором ортонормированном базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

является положительным симметрическим, и найдите такой положительный симметрический оператор B , что $A = B^2$.

6.4. Представьте в виде произведения положительного самосопряженного и ортогонального операторов оператор, заданный в некотором ортонормированном базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.5. Докажите, что симметрический оператор положителен тогда и только тогда, когда все коэффициенты его характеристического полинома отличны от нуля и имеют чередующиеся знаки.

Пожалуйста, пишите разборчиво или набирайте в ТрХе. Задача со звездочкой является бонусной.