

Домашнее задание 5

Везде, где это не указано явно, пространство V предполагается евклидовым (в частности, вещественным).

5.1. Найдите собственный ортонормированный базис и матрицу в этом базисе оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.2. В пространстве $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$ введем скалярное произведение по правилу

$$(A, B) = \text{tr}(A \cdot B^t).$$

Докажите, что операторы $X \mapsto AX$ и $X \mapsto A^tX$ сопряжены.

5.3. Докажите, что произведение двух симметрических операторов A и B в пространстве V является симметрическим тогда и только тогда, когда $AB = BA$.

5.4*. Пусть V — пространство вещественных бесконечно дифференцируемых 2π -периодических функций на прямой \mathbb{R} со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx.$$

Пусть также D^k — оператор k -кратного дифференцирования, а $h(x)$ — фиксированная функция из V . Докажите, что отображение $A: V \rightarrow V$, заданное правилом

$$Af = h(x)D^k(f),$$

является линейным оператором, и найдите сопряжённый к нему.

УКАЗАНИЕ. Если общий случай вызывает трудности, начните со случая $h \equiv 1$.

Пожалуйста, пишите разборчиво или набирайте в ТeXе. Задача со звёздочкой является бонусной.