

Задачи для семинара 4

Решения некоторых задач (по выбору преподавателей и студентов) обсуждаются на семинарах. Остальные задачи рекомендуется решать дома для лучшего понимания лекций. Везде, где это не указано явно, скалярное произведение в \mathbb{R}^n считается стандартным:

$$(x, y) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$$

4.1. Найдите ортогональную проекцию вектора $v \in V$ в евклидовом пространстве на подпространство, порожденное системой ортонормированных векторов e_1, \dots, e_k .

4.2. Дополните до ортогонального базиса систему векторов в \mathbb{R}^4

$$((1, 1, 1, 2), (1, 2, 3, -3)).$$

4.3. С помощью процесса ортогонализации Грама–Шмидта постройте ортогональный базис в линейной оболочке следующих векторов евклидова пространства:

$$(1, 1, -1, -2), (5, 8, -2, -3), (3, 9, 3, 8).$$

4.4. Пусть e_1, \dots, e_k — ортонормированная система векторов n -мерного евклидова пространства V (не обязательно базис). Докажите, что для любого вектора $v \in V$ выполняется *неравенство Бесселя*

$$|(e_1, v)|^2 + |(e_2, v)|^2 + \dots + |(e_k, v)|^2 \leq \|v\|^2,$$

причем равенство для любого v достигается только при $k = n$ (*равенство Парсеваля*).

4.5. Найдите уравнения, задающие ортогональное дополнение к пространству, заданному системой уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

4.6. Рассмотрим пространство функций на отрезке $[-1, 1]$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx.$$

С помощью процесса ортогонализации Грама–Шмидта постройте ортогональный базис в линейной оболочке системы многочленов $1, x, x^2, x^3$ (то, что получится, называется *многочленами Лежандра*).

4.7. Найдите угол между вектором v и подпространством L :

$$L = \langle (0, 0, 0, 1), (1, -1, -1, 1), (-3, 3, 3, 0) \rangle, \quad v = (1, 2, 3, 0).$$

4.8. Докажите, что если в n -мерном пространстве задана система из k векторов, все попарные углы между которыми тупые, то $k \leq n + 1$.