Задачи для семинара 5

Решения некоторых задач (по выбору преподавателей и студентов) обсуждаются на семинарах. Остальные задачи рекомендуется решать дома для лучшего понимания лекций.

Везде, где это не указано явно, пространство V предполагается евклидовым (в частности, вещественным).

5.1. Найдите ортогональную проекцию вектора $v \in V$ в евклидовом пространстве на подпространство, порожденное системой ортонормированных векторов $e_1, \ldots, e_k$.

5.2. Найдите собственный ортонормированный базис и матрицу в этом базисе оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}$; **в)** $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

5.3. Докажите, что оператор A в евклидовом пространстве кососимметричен тогда и только тогда, когда для любого $v \in V$ векторы v и Av ортогональны.

5.4. а) Пусть A и B — симметрические операторы в евклидовом пространстве V, причём $(Av, v) = (Bv, v)$ для любого $v \in V$. Докажите, что $A = B$.

б) Верно ли это без условия симметричности?

5.5. В пространстве $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ введем скалярное произведение по правилу

$$(A, B) = \mathrm{tr}(A \cdot B^t).$$

а) Докажите, что $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ — евклидово пространство.

б) Пусть C — ортогональная матрица. Найдите её длину относительно этого скалярного произведения.

в) Докажите, что оператор $X \mapsto CX$, где C ортогональная, является ортогональным.

5.6. Докажите, что ядро и образ сопряженного оператора A^* являются ортогональными дополнениями соответственно к образу и ядру оператора A.

5.7. Пусть V — пространство вещественных бесконечно дифференцируемых функций на отрезке $[0, 1]$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Найдите оператор, сопряженный к оператору дифференцирования D.