

### Задачи для семинара 3

Решения некоторых задач (по выбору преподавателей и студентов) обсуждаются на семинарах. Остальные задачи рекомендуется решать дома для лучшего понимания лекций.

**3.1.** Методом Якоби найти канонический вид симметрической билинейной функции

$$2x_1y_1 - x_1y_2 + x_1y_3 - x_2y_1 + x_3y_1 + 3x_3y_3.$$

**3.2.** При каких значениях  $\lambda$  является положительно определенной квадратичная форма

$$5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3?$$

**3.3 (неравенство треугольника).** Докажите, что для любой положительно определенной симметрической квадратичной формы  $f$  выполнено неравенство

$$\sqrt{f(x+y)} \leq \sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}.$$

**3.4.** Найдите нормальный вид над  $\mathbb{R}$  квадратичной формы:

а)  $x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$ ;

б)  $\sum_{1 \leq i, j \leq n} |i - j| x_i x_j$ .

**3.5.** Эквивалентны ли над  $\mathbb{R}$  квадратичные формы

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_3^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2 \quad \text{и} \quad x_1^4 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + x_3^2?$$

**3.6.** Найдите сигнатуру квадратичной формы на пространстве матриц

$$\text{Mat}_n(\mathbb{R}) \times \text{Mat}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad A \mapsto \text{tr}(A^2).$$

**3.7.** Найдите ортогональное дополнение к подпространству симметрических матриц относительно формы из предыдущей задачи.

**3.8.** Пусть  $f$  — невырожденная симметрическая билинейная форма, отрицательный индекс инерции которой равен 1 и  $f(v, v) < 0$  для некоторого вектора  $v$ . Докажите, что ограничение  $f$  на любое подпространство, содержащее  $v$ , невырождено.

**3.9.** Докажите, что размерность максимального изотропного подпространства относительно невырожденной симметрической билинейной формы равна наименьшему из её положительного и отрицательного индексов инерции.