Домашнее задание 2

2.1. Пусть α — билинейная форма, удовлетворяющая условию

$$\alpha(v,w)=0\Leftrightarrow\alpha(w,v)=0.$$

Докажите, что α либо симметрическая, либо кососимметрическая.

2.2. Найдите левое и правое ядра билинейной функции, заданной в базисе (e_1,e_2,e_3) матрицей

$$\begin{pmatrix}4&3&2\\1&3&5\\3&6&9\end{pmatrix}.$$

2.3. Найдите матрицу билинейной формы α в новом базисе, если заданы ее матрица в старом базисе и формулы перехода.

$$\begin{pmatrix}0&2&1\\-2&2&0\\-1&0&3\end{pmatrix},\qquad\begin{cases}e_1'=e_1+2e_2-e_3,\\e_2'=e_2-e_3,\\e_3'=-e_1+e_2-3e_3.\end{cases}$$

2.4. Пусть α — билинейная функция с матрицей A на верктороном пространстве V, и пусть $U\subseteq V$ — подпространство. Найдите левое и правое ортогональные дополнения к V относительно α (то есть максимальные подпространства U_1 и U_2, для которых $\alpha(U_1,U)=\alpha(U,U_2)=0$), если

$$A=\begin{pmatrix}6&-8&5\\5&-5&3\\1&-3&1\end{pmatrix},\qquad U=\langle(2,0,-3),(3,1,5)\rangle.$$

2.5. Докажите, что функция на пространстве матриц

$$\mathrm{Mat}_n(K)\times\mathrm{Mat}_n(K)\to K,\qquad (A,B)\mapsto\mathrm{tr}(A^TB)$$

является билинейной формой. Будет ли она невырожденной?

Пожалуйста, пишите разборчиво или набирайте в TEXе.