

## Задачи для семинара 7

Решения некоторых задач (по выбору преподавателей и студентов) обсуждаются на семинарах. Остальные задачи рекомендуется решать дома для лучшего понимания лекций. Везде, где это не указано явно, пространство  $V$  предполагается комплексным эрмитовым.

**6.1.** При каких  $\lambda$  является положительно определенной квадратичная форма

$$\overline{x_1}x_1 + i\overline{x_2}x_1 - i\overline{x_1}x_2 + \lambda\overline{x_2}x_2?$$

**6.2.** Приведите следующую эрмитову квадратичную функцию к главным осям:

$$5|x_1|^2 + 6|x_2|^2 - i\sqrt{3}\overline{x_1}x_2 + i\sqrt{3}\overline{x_2}x_1.$$

**6.3.** Найдите положительный и отрицательный индексы инерции квадратичной функции  $q(x) = \operatorname{tr} \overline{x}x$  при  $x \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{C})$ .

**6.4.** Докажите, что если  $v \in V$  — собственный вектор операторов  $A$  и  $A^*$  в эрмитовом пространстве с собственными значениями  $\lambda$  и  $\mu$ , то  $\overline{\lambda} = \mu$ .

**6.5.** Найдите собственный ортонормированный базис и матрицу в этом базисе эрмитова оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 - i \\ 2 + i & 7 \end{pmatrix}$$

**6.6.** Найдите собственный ортонормированный базис и матрицу в этом базисе унитарного оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей:

а)  $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ ; б)  $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 + i & 1 \\ -1 & 1 - i \end{pmatrix}$ .

**6.7.** Докажите, что унитарная матрица размера  $2 \times 2$  с определителем, равным 1, подобна вещественной ортогональной матрице.

**6.8.** Оператор  $A$  называется *нормальным*, если  $AA^* = A^*A$ . Докажите, что оператор  $A$  нормален тогда и только тогда, когда  $|Av| = |A^*v|$  для всех  $v \in V$ .

**6.9.** Пусть  $A$  — нильпотентный нормальный оператор в эрмитовом пространстве. Докажите, что  $A = 0$ .