Задачи для семинара 6

Решения некоторых задач (по выбору преподавателей и студентов) обсуждаются на семинарах. Остальные задачи рекомендуется решать дома для лучшего понимания лекций.

Везде, где это не указано явно, пространство V предполагается евклидовым (в частности, вещественным).

6.1. Убедитесь, что в следующих двух парах форм одна является положительно определенной; найдите невырожденное линейное преобразование, приводящее эту форму к нормальному виду (т.е. с единичной матрицей), а вторую — к диагональному виду:

$$f(x) = -4xy; \qquad g(x) = x^2 - 2xy + 4y^2.$$

6.2. Докажите, что ненулевая кососимметрическая квадратичная форма не может распадаться в произведение двух линейных форм.

6.3. Найдите канонический вид ортогональной матрицы и ортонормированный базис, в котором матрица имеет такой вид.

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.4. Докажите, что оператор, заданный в некотором ортонормированном базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix},$$

является положительным симметрическим, и найдите такой положительный симметрический оператор B, что $A = B^2$.

6.5. Представьте в виде произведения положительного самосопряженного и ортогонального операторов оператор, заданный в некотором ортонормированном базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

6.6. Пусть A — симметрический оператор. Докажите, что оператор

$$\exp(A) = E + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

положительный симметрический.

6.7. а) Пусть A и B — коммутирующие операторы. Докажите, что

$$\exp(A+B) = \exp A \cdot \exp B.$$

б) Пусть A — кососимметрический оператор. Докажите, что оператор $\exp A$ ортогонален.