Задачи для семинара 8

Решения некоторых задач (по выбору преподавателей и студентов) обсуждаются на семинарах. Остальные задачи рекомендуется решать дома для лучшего понимания лекций.

8.1. Докажите, что если v и w — чисто мнимые кватернионы, то

$$v \cdot w = -(v, w) + [v, w].$$

8.2. Опишите центр $Z(\mathbb{H})$ алгебры кватернионов $\mathbb{H}$. (Напомним, что

$$Z(\mathbb{H}) = \{q \in \mathbb{H} \mid zq = qz \quad \forall z \in \mathbb{H}\}).$$

8.3. Пусть $q \in \mathbb{H}$ таково, что $q^2 = -1$. Опишите геометрически множество всех таких q и докажите, что для каждого из них множество кватернионов вида $a + bq$, где $a, b \in \mathbb{R}$, образует подполе в $\mathbb{H}$, изоморфное полю $\mathbb{C}$.

8.4. Докажите, что 24-элементное множество $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k, \frac{1}{2}(\pm 1 \pm i \pm j \pm k)\}$ является мультипликативной подгруппой в $\mathrm{SU}(2)$ (его элементы называются *единицами Гурвица).*

Можно доказать, что эти элементы лежат в вершинах самодвойственного правильного 24-гранника в $\mathbb{R}^4$.

8.5. Пусть v — чисто мнимый кватернион единичной длины, $z = \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)v \in \mathrm{SU}(2)$. Докажите, что сопряжение

$$R_z \colon \Im \to \Im, \qquad q \mapsto zqz^{-1}$$

является вращением трёхмерного пространства $\Im \subset \mathbb{H}$ чисто мнимых кватернионов вокруг вектора v на угол θ.

8.6. Рассмотрим группу вращений тетраэдра $\mathrm{Sym}^+(T) \subset \mathrm{SO}(3)$. В ней 12 элементов. Докажите, что её полный прообраз при двулистном накрытии $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ изоморфен группе единиц Гурвица.

8.7*. Что будет, если вместо тетраэдра взять куб или додекаэдр?