Листок 2

Определение. Пусть на векторных пространствах V и V' над полем $\mathbb{K}$, где $\operatorname{char}\mathbb{K} \neq 2$, заданы невырожденные симметрические билинейные формы α и α' соответственно. Линейное отображение $A\colon V \to V'$ называется *изометрией*, если $\alpha'(Av, Aw) = \alpha(v, w)$; пространства V и V' в таком случае называются *изометричными*. Цель следующей задачи – доказать *теорему Витта*.

Теорема Витта. *Пусть V и V' — изометричные пространства (с заданными формами α и α'), $U \subset V$ и $U' \subset V'$ — подпространства в них, и $A_U : U \to U'$ — изометрия этих подпространств. Тогда существует такая изометрия $A\colon V \to V'$, что $A|_U = A_U$. Иными словами, данная изометрия подпространств продолжается до изометрии объемлющих пространств.*

Задача 1. Докажите теорему Витта, проделав следующие шаги:

а) Докажите, что если U вырождено, то существует такое подпространство $\bar{U}$, где $U \subset \bar{U} \subset V$ и $\dim \bar{U} = \dim U + 1$, и линейное отображение $\bar{A}_{\bar{U}} : \bar{U} \to V'$, продолжающее A_U, для которого $A_{\bar{U}} : \bar{U} \to A_{\bar{U}}(\bar{U})$ является изометрией. (Т.е. изометрию можно продолжить с вырожденного подпространства).

б) Пусть $V = V'$, и пусть $U \subset V$, $U = \mathbb{K} \cdot u$ — неизотропная прямая (т.е. $\alpha(u, u) \neq 0$). Положим $u' = A_U u$. Тогда теорема Витта справедлива для подпространства U.

Указание. В качестве кандидатов на изометрию рассмотрите отражения относительно векторов $u \pm u'$.

в) Пусть $V = V'$ и $\dim U \geq 2$. Докажите теорему Витта, воспользовавшись ортогональным разложением и индукцией по $\dim U$.

Решения нужно сдавать устно на математическом практикуме. Рекомендуется предварительно записывать решения, чтобы ничего не забыть.