Задачи для семинара 1

Решения некоторых задач (по выбору преподавателей и студентов) обсуждаются на семинарах. Остальные задачи рекомендуется решать дома для лучшего понимания лекций.

1.1. Найдите размерности суммы и пересечения линейных оболочек систем векторов пространства $\mathbb{R}^4$:

$$U = \langle (1, 2, 0, 1), (1, 1, 1, 0) \rangle, \qquad W = \langle (1, 0, 1, 0), (1, 3, 0, 1) \rangle.$$

1.2. Пусть U, V, W — подпространства векторного пространства. Всегда ли $U \cap (V + W) = (U \cap V) + (U \cap W)$?

1.3. *Аннулятором* векторного подпространства $U \subset V$ называется подмножество пространства линейных функционалов

$$\operatorname{Ann} U = \{\alpha \in V^* \mid \alpha(u) = 0 \quad \forall u \in U\}.$$

а) Докажите, что $\operatorname{Ann} U$ — подпространство в V^*.
б) Докажите, что $U \subset W$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ann} U \supset \operatorname{Ann} W$.
в) Пусть V конечномерно. Докажите, что $\dim \operatorname{Ann} U + \dim U = \dim V$.
г) $U \subseteq \operatorname{Ann}(\operatorname{Ann} U)$, причем если V конечномерно, то включение превращается в равенство.

1.4. Найдите аннулятор подпространства

$$\langle (1, -1, 1, 0), \quad (1, 1, 0, 1), \quad (2, 0, 1, 1) \rangle \subset \mathbb{R}^4.$$

(т.е. выпишите систему уравнений, решением которой является это подпространство).

1.5. Докажите, что если два линейных функционала на векторном пространстве имеют одинаковые ядра, то они различаются линейным множителем.

1.6. Докажите, что n линейных функционалов на n-мерном пространстве линейно независимы тогда и только тогда, когда пересечение их ядер есть нулевое пространство.

1.7. Докажите, что для $V = \mathbb{Q}[x]$ пространство V^{**} не изоморфно V.

1.8. Пусть $V = \mathbb{R}[x]_{\leq n}$ — пространство многочленов степени не выше n. Набор линейных функционалов φ_k, где $0 \leq k \leq n$, определен по правилу:

$$\varphi_k(f) = \int_0^{k+1} f(x) dx.$$

Верно ли, что этот набор образует базис в V^*?