Задачи для семинара 2

Решения некоторых задач (по выбору преподавателей и студентов) обсуждаются на семинарах. Остальные задачи рекомендуется решать дома для лучшего понимания лекций.

2.1. Докажите, что каждая билинейная форма представляется в виде суммы симметрической и кососимметрической.

2.2. Докажите, что для ортогональных дополнений к пространствам относительно невырожденной симметрической формы справедливы равенства:
а) $(U^{\perp})^{\perp} = U$; **б)** $(U_1 + U_2)^{\perp} = U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp}$; **в)** $(U_1 \cap U_2)^{\perp} = U_1^{\perp} + U_2^{\perp}$.
Что можно сказать, если форма вырождена?

2.3. Найдите матрицу билинейной формы α в новом базисе, если заданы ее матрица в старом базисе и формулы перехода.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} e_1' = e_1 - e_2, \\ e_2' = e_1 + e_3, \\ e_3' = e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

2.4. Найдите левое и правое ядра билинейной функции, заданной в базисе (e_1, e_2, e_3) матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 5 \\ 5 & -8 & 6 \end{pmatrix}.$$

2.5. Пусть α — билинейная функция с матрицей A на верктормом пространстве V, и пусть $U \subseteq V$ — подпространство. Найдите левое и правое ортогональные дополнения к V относительно α (то есть максимальные подпространства U_1 и U_2, для которых $\alpha(U_1, U) = \alpha(U, U_2) = 0$), если

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}, \qquad U = \langle (1, -1, 0), (-2, 3, 1) \rangle.$$

2.6. Докажите, что функция на пространстве матриц

$$\mathrm{Mat}_n(K) \times \mathrm{Mat}_n(K) \to K, \qquad (A, B) \mapsto \mathrm{tr}(AB)$$

является билинейной формой. Будет ли она невырожденной?

Напомним, что подпространство называется *изотропным*, если ограничение квадратичной формы на него тождественно равно нулю.

2.7. Может ли невырожденная квадратичная форма на двумерном вещественном пространстве иметь: **а)** ровно одно; **б)** ровно два; **в)** ровно три изотропных подпространства? Тот же вопрос, если форма не обязательно невырождена.