

## Задачи для подготовки к зачету

9.1. Найдите размерности: **а)** суммы; **б)** пересечения линейных оболочек следующих систем векторов в  $\mathbb{R}^4$ :

$$V = \langle (1, 2, 3, 4), (5, 6, 7, 8), (9, 10, 11, 12) \rangle, \quad W = \langle (4, 3, 2, 1), (1, 2, 1, 2), (2, -1, 0, -3) \rangle.$$

9.2. Найдите: **а)** ранг; **б)** сигнатуру квадратичной формы на пространстве  $\mathbb{R}^3$ :  $x^2 + y^2 + z^2 - 3xy + 3yz - 2xz$ .

9.3. Укажите какой-нибудь базис в пространстве вещественных  $n \times n$ -матриц, в котором билинейная форма  $(A, B) = \operatorname{tr} AB$  приводится к нормальному виду.

9.4. Найдите расстояние от точки  $(1, 2, 3)$  до плоскости  $3x + 2y + z = 1$  в евклидовом пространстве.

9.5. Пусть  $Z$  – симметрическая положительно определенная  $n \times n$ -матрица.

**а)** Докажите, что формула  $(A, B) = \operatorname{tr} AZB^t$  задает положительно определенное скалярное произведение на пространстве вещественных  $n \times n$ -матриц.

**б)** Найдите оператор, сопряженный к оператору умножения справа на данную матрицу  $X$ .

9.6. Извлеките квадратный корень из самосопряженной матрицы  $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

9.7. Найдите ортонормированный собственный базис для эрмитова оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей  $\begin{pmatrix} 2 & -1 - i \\ -1 + i & 4 \end{pmatrix}$ .

9.8. Постройте сюръективный гомоморфизм  $\operatorname{SO}(4) \rightarrow \operatorname{SO}(3)$ .