Алгебра, первый курс, третий модуль

Е. Ю. Смирнов

Аннотация. Записки лекций по алгебре для первого курса факультета математики ВШЭ, весна 2013/14 учебного года

1. Первая лекция, 15 января 2014 г.

1.1. **Напоминание о векторных пространствах.** Пусть $\mathbb{K}$ — поле, которое мы будем считать фиксированным. Напомним определение векторного пространства.

Определение 1.1. *Векторным пространством* над полем $\mathbb{K}$ называется абелева группа V с операцией умножения на элементы поля $\mathbb{K}$:

$$\mathbb{K} \times V \to V, \qquad (\lambda, v) \mapsto \lambda v,$$

удовлетворяющей (для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ и $v, w \in V$) следующим аксиомам:

- $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ (дистрибутивность по скалярам);
- $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$ (дистрибутивность по векторам);
- $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$ (ассоциативность);
- $1 \cdot v = v$.

Замечание 1.2. Векторное пространство иногда ещё называют линейным пространством — это то же самое, хотя, скажем, по-английски можно сказать только “vector space”.

Упражнение 1.3 (обязательное!)**.** Прежде чем читать дальше, вспомните, что такое базис и размерность векторного пространства.

Пример 1.4. Всякое поле $\mathbb{K}$ является векторным пространством над любым своим подполем (в частности, $\mathbb{K}$ есть одномерное векторное пространство над собой).

Пример 1.5 (арифметическое векторное пространство)**.** Пространство строк $\mathbb{K}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{K}$ с естественными операциями сложения и умножения на скаляры из $\mathbb{K}$ является n-мерным векторным пространством над $\mathbb{K}$.

Вы используете эти записки на свой страх и риск. Никто не гарантирует, что их текст полностью соответствует содержанию лекций. Тем более не гарантируется отсутствие в этом тексте ошибок. Впрочем, о найденных ошибках лучше сообщать автору.

Пример 1.6. Пусть X — произвольное множество, а $\mathrm{Fun}(X, \mathbb{K})$ — функции на X со значениями в $\mathbb{K}$. Функции можно складывать между собой и умножать на числа; значит, $\mathrm{Fun}(X, \mathbb{K})$ является векторным пространством. Если X конечно, то это пространство конечномерно, и его размерность равна $\#X$; в противном случае оно бесконечномерно.

Пример 1.7. Можно рассматривать не все функции на X, а функции с какими-либо разумными ограничениями: скажем, если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, то векторными пространствами будут множества непрерывных функций $C^0(\mathbb{R})$, дифференцируемых функций $D(\mathbb{R})$, функций с непрерывной k-той производной $C^k(R)$, бесконечно-дифференцируемых функций $C^\infty(\mathbb{R})$, многочленов $\mathbb{R}[x]$, рациональных функций $\mathbb{R}(x)$...

Определение 1.8. Подмножество $U \subseteq V$ векторного пространства называется его *подпространством*, если оно само является векторным пространством относительно тех же операций сложения и умножения на скаляр.

Очевидно, что всякое подпространство содержит нуль.

1.2. **Напоминание, часть 2: линейные отображения.** Пусть V, W — векторные пространства (над одним и тем же полем $\mathbb{K}$).

Определение 1.9. Отображение $f\colon V \to W$ называется *линейным*, если для любых $v, v' \in V$ и $\lambda \in \mathbb{K}$ выполняются равенства $f(v + v') = f(v) + f(v')$ и $f(\lambda v) = \lambda f(v)$.

Определение 1.10. *Ядро* линейного отображения $f\colon V \to W$ — это множество всех векторов из V, переходящих в нуль:

$$\mathrm{Ker}\, f = \{v \in V \mid f(v) = 0\} \subseteq V.$$

Образ отображения f — это множество всех векторов из W, в которые переходят векторы из V:

$$\mathrm{Im}\, f = \{w \in W \mid \exists v \in V\colon f(v) = w\} \subseteq W.$$

Упражнение 1.11. Докажите, что $\mathrm{Ker}\, f$ и $\mathrm{Im}\, f$ суть подпространства в V и W соответственно.

Линейные отображения тоже можно складывать: $(f + g)(v) := f(v)+g(v)$ и умножать на скаляры: $(\lambda f)(v) = \lambda \cdot f(v)$. Тем самым они тоже образуют векторное пространство над $\mathbb{K}$. Оно обозначается $\mathrm{Hom}(V; W)$ (от слова “homomorphism”).

Упражнение 1.12. Пусть в V и W выбраны базисы. Постройте базис в $\mathrm{Hom}(V; W)$ и докажите, что $\dim \mathrm{Hom}(V; W) = \dim V \cdot \dim W$.

1.3. **Линейные функционалы.**

Определение 1.13. *Линейным функционалом* (или *линейной формой*) на V называется линейное отображение $V \to \mathbb{K}$.

Линейные функционалы образуют векторное пространство $\mathrm{Hom}(V;\mathbb{K})$, которое обозначается V^*. Согласно упр. 1.12, $\dim V^* = \dim V$.

Приведем несколько примеров линейных функционалов.

Пример 1.14. Пусть $V = \mathrm{Fun}(X, \mathbb{K})$ — пространство функций на множестве X. Фиксируем какой-нибудь элемент $x_0 \in X$. Отображение $\alpha\colon f \mapsto f(x_0)$ будет линейным функционалом.

Пример 1.15. $V = \mathbb{R}^3$, на котором задано скалярное произведение. Пусть $v_0 \in V$ — произвольный вектор. Тогда отображение $\alpha(v) = (v_0, v)$ — линейный функционал.

Пример 1.16. $V = C^1(\mathbb{R})$. Отображение $\alpha(f) = f'(0)$, сопоставляющее функции значение её производной в нуле — линейный функционал.

Пример 1.17. $V = C(\mathbb{R})$. Отображение $\alpha(f) = \int_a^b f(x)dx$, сопоставляющее функции значение её интеграла по некоторому отрезку — линейный функционал.

Пример 1.18. $V = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ — пространство матриц. Отображение $A \mapsto \mathrm{tr}\, A$, сопоставляющее матрице её след — линейный функционал.

1.4. **Сопряженное векторное пространство.** Пусть V — конечномерное пространство с базисом $e_1, \dots, e_n$, $\alpha \in V^*$ — некоторый функционал на V. Пусть $v = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$. Тогда

$$\alpha(v) = \alpha(\sum x_ie_i) = x_1\alpha(e_1) + \dots + x_n\alpha(e_n).$$

Значит, значение функционала α на любом векторе определяется его значениями на $e_1, \dots, e_n$. Обозначим $a_i = \alpha(e_i)$. Ясно, что любой набор значений a_i будет задавать некоторый функционал, и разным наборам отвечают разные функционалы. Это ещё раз показывает, что $\dim V^* = n$.

Построим базис в пространстве функционалов. Для этого возьмём *координатные функции* $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$, определенные по правилу

$$\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Согласно вышесказанному, ε_i образуют базис пространства V. Он называется *двойственным*, или *сопряженным, базисом* к $e_1, \dots, e_n$.

Отображение $e_i \mapsto \varepsilon_i$ задаёт изоморфизм $V \cong V^*$. Однако этот изоморфизм *не является каноническим*: он зависит от выбора базиса в V. Другой выбор базиса задаёт *другой* изоморфизм между этими пространствами!

Пусть теперь $v \in V$ — произвольный вектор. Он задаёт отображение f_v из V^* в $\mathbb{K}$ по следующему правилу:

$$f_v \colon V \to \mathbb{K}, \qquad f_v(\xi) = \xi(v).$$

Ясно, что f_v — линейный функционал на пространстве V^*, то есть элемент *дважды двойственного* пространства V^{**}. Тем самым мы построили отображение $f \colon V \to V^{**}$, $v \mapsto f_v$.

Теорема 1.19. *Если V конечномерно, отображение $f \colon V \to V^{**}$ является изоморфизмом векторных пространств.*

Доказательство. Ясно, что $f_{v+w} = f_v + f_w$ и $f_{\lambda v} = \lambda f_v$. Так что осталось проверить, что отображение f является биекцией.

Действительно, пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис в V, а $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ — двойственный к нему базис в V^*. Тогда $f_{e_i}(\varepsilon_j) = \varepsilon_j(e_i) = \delta_{ij}$. Значит, $f_{e_1}, \ldots, f_{e_n}$ — базис в V^{**}, сопряженный к $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$. Поэтому отображение f переводит вектор $v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ в вектор $f_v = x_1 f_{e_1} + \cdots + x_n f_{e_n}$. Значит, это отображение действительно является биекцией. $\square$

Следствие 1.20. *Каждый базис в V^* сопряжён некоторому базису из V.*

Тем самым отображение $f \colon V \to V^{**}$, если V конечномерно, является изоморфизмом. В отличие от изоморфизма $V \cong V^{**}$, этот изоморфизм уже не зависит от выбора базиса, т.е. является *каноническим.* В случае бесконечномерного пространства это отображение будет инъективным (проверьте это!), но, вообще говоря, оно не обязано быть сюръективным.

Векторные пространства, для которых $V \cong V^{**}$, называются *рефлексивными.*

Упражнение 1.21. Придумайте пример нерефлексивного векторного пространства (разумеется, оно будет бесконечномерным).

1.5. **Формулы Тейлора и Лагранжа.**

Пример 1.22. Пусть $\operatorname{char} \mathbb{K} = 0$. Рассмотрим пространство $V = \mathbb{K}[x]_n$ многочленов степени не выше n. Рассмотрим линейные функционалы $\delta_a^{(0)}, \ldots, \delta_a^{(n)}$ на V, определенные по правилу:

$$\delta_a^{(0)}(f) = f(a); \qquad \delta_a^{(k)}(f) = f^{(k)}(a),$$

(то есть $\delta_a^{(k)}$ сопоставляет многочлену f значение его k-й производной в точке a). Они образуют базис пространства V^*, двойственный к базису $f_k = \frac{(x-a)^k}{k!}$, где $k = 0, \ldots, n$, пространства V (проверьте это). Значит, каждый многочлен из V можно представить в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \delta_a^{(k)}(f)\frac{(x-a)^k}{k!} =$$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + \dots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}.$$

Это известная из курса математического анализа *формула Тейлора.*

Рассмотрим ещё один пример.

Пример 1.23. Пусть, как и в предыдущем примере, $V = \mathbb{K}[x]_n$. Рассмотрим $n+1$ различную точку $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$. Пусть $\alpha_k(f) = f(x_k)$ — функционалы взятия значения многочлена в этих точках. Очевидно, они линейно независимы, а поскольку их $n+1$ штука, они образуют базис в V^*.

Нетрудно выписать базис $f_0, \dots, f_n$ пространства V, двойственный к этому. Он определяется условием $\alpha_i(f_j) = \delta_{ij}$, то есть многочлен f_j должен иметь корни во всех точках $x_i \neq x_j$, а в x_j принимать значение 1. Этому свойству удовлетворяют многочлены

$$f_j(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots\widehat{(x-x_j)}\dots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\dots\widehat{(x_j-x_j)}\dots(x_j-x_n)} = \prod_{i\neq j}\frac{x-x_i}{x_j-x_i},$$

где крышка обозначает пропуск соответствующего сомножителя.

Разложение $f(x) = \sum \alpha_i(f)\cdot f_i(x)$ произвольного многочлена по базису из f_i тогда даёт *интерполяционную формулу Лагранжа*:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j(x)\prod_{i\neq j}\frac{x-x_i}{x_j-x_i}.$$