## 8. Восьмая лекция, 26 февраля 2014 г.

В этой лекции через $V$ будет обозначаться $n$-мерное *эрмитово* пространство, т.е. комплексное векторное пространство, на котором задана положительно определенная эрмитова форма $(\ ,\ )$.

8.1. **Соответствие между $V$ и $V^*$.** С помощью формы $(\ ,\ )$ можно задать изоморфизм между пространством $V$ и двойственным к нему $V^*$. А именно, при этом изоморфизме вектор $v$ будет переходить в линейный функционал $\xi_v$, заданный по правилу:

$$\xi_v(w) := (v, w) \in \mathbb{C}$$

Этот функционал действительно будет линеен, поскольку форма $(\ ,\ )$ линейна по второму аргументу.

Мы получили отображение из $V$ в $V^*$. Оно будет изоморфизмом *вещественных* векторных пространств; однако оно будет *антилинейно* по отношению к умножению на комплексные числа:

$$\lambda \cdot v \mapsto \xi_{\lambda v} = \overline{\lambda} \cdot \xi_v.$$

8.2. **Соответствие между полуторалинейными формами и линейными операторами.** Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор на $V$. Он задает на $V$ полуторалинейную форму $\varphi_{\mathcal{A}}(v, w)$ по правилу:

$$\varphi_{\mathcal{A}}(v, w) := (v, \mathcal{A}w).$$

Заметим, что, хотя форма $(\ ,\ )$ была эрмитовой, про форму $\varphi_{\mathcal{A}}$ этого утверждать нельзя: она, вообще говоря, эрмитовой не будет.

Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — *ортонормированный* базис пространства $V$. Тогда матрица формы $\varphi_{\mathcal{A}}$ в этом базисе выглядит так же, как матрица $A = (a_{ij})$ оператора $\mathcal{A}$. Действительно,

$$\varphi_{\mathcal{A}}(e_i, e_j) = (e_i, \mathcal{A}e_j) = (e_i, \sum_k a_{kj} e_k) = a_{ij}.$$

Определим на пространстве полуторалинейных форм инволюцию (т.е. отображение, квадрат которого равен тождественному) по правилу:

$$\varphi(v, w) \mapsto \overline{\varphi(w, v)}.$$

(за счет сопряжения полученная форма снова будет полулинейна по первому аргументу и линейна по второму). Неподвижные точки этой инволюции — это в точности эрмитовы формы.

Поскольку формы можно отождествить с линейными операторами, мы получаем инволюцию на пространстве линейных операторов, называемую *сопряжением*: $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}^*$. Согласно вышесказанному, сопряженный к $\mathcal{A}$ оператор — это оператор $\mathcal{A}^*$, удовлетворяющий равенству

$$(\mathcal{A}^* v, w) = (v, \mathcal{A}w) \qquad \forall v, w \in V.$$

Матрица $\mathcal{A}^*$ получается из матрицы $\mathcal{A}$ композицией транспонирования и комплексного сопряжения: $A^* = \overline{A^t}$.

### 8.3. **Эрмитовы и косоэрмитовы операторы.**

**Определение 8.1.** Оператор $\mathcal{A}$ называется *эрмитовым* (соотв. *косоэрмитовым*), если $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ (соотв. $\mathcal{A} = -\mathcal{A}^*$).

Эрмитовы и косоэрмитовы операторы иногда еще называют *самосопряженными* и *антисамосопряженными*.

**Предложение 8.2.** *Эрмитовы и косоэрмитовы операторы образуют* вещественные *векторные пространства (обозначим их* $\mathrm{Herm}(V)$ *и* $\mathrm{SkewHerm}(V)$*). Пространство* $\mathrm{End}(V)$ *есть прямая сумма этих двух подпространств (т.е. всякий оператор есть сумма эрмитова и косоэрмитова). Размерности (вещественные!) этих подпространств равны* $n^2$*.*

*Доказательство.* Во-первых, ясно, что сумма двух (косо)эрмитовых операторов снова (косо)эрмитова, а при умножении на вещественный (но не комплексный!) скаляр (косо)эрмиров оператор снова остается таковым. Далее, если оператор одновременно эрмитов и косоэрмитов, то он нулевой, т.к. $\mathcal{A} = \mathcal{A}^* = -\mathcal{A}^*$. Поэтому эрмитовы и косоэрмитовы операторы образуют вещественные подпространства, пересекающиеся лишь по нулю.

Далее, пусть $\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$ — произвольный оператор. Тогда операторы $\frac{1}{2}(\mathcal{A} + \mathcal{A}^*)$ и $\frac{1}{2}(\mathcal{A} - \mathcal{A}^*)$ будут эрмитовым и косоэрмитовым соответственно, а их сумма равна $\mathcal{A}$. Стало быть, $\mathrm{End}(V) = \mathrm{Herm}(V) \oplus \mathrm{SkewHerm}(V)$. Наконец, отображение $\mathcal{A} \mapsto i\mathcal{A}$ переводит эрмитовы операторы в косоэрмитовы и наоборот, задавая изоморфизм между (вещественными!) векторными пространствами $\mathrm{Herm}(V)$ и $\mathrm{SkewHerm}(V)$. Поэтому размерность каждого из них равна $\frac{1}{2}\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{End}(V)$, т.е. $n^2$. $\square$

*Замечание* 8.3. Про разложение оператора в сумму эрмитова и косоэрмитова можно думать как про обобщение разложения комплексного числа в сумму вещественного и чисто мнимого (а в случае $\dim V = 1$ это в точности одно и то же).

8.4. **Унитарные операторы.** Понятие унитарного оператора в эрмитовом пространстве является аналогом понятия ортогонального оператора в евклидовом пространстве.

**Определение 8.4.** Оператор $\mathcal{A}$ называется *унитарным*, если он сохраняет норму вектора: $||\mathcal{A}v|| = ||v||$ для любого $v \in V$.

*Замечание* 8.5. Оператор унитарен тогда и только тогда, когда он сохраняет скалярное произведение:

$$(\mathcal{A}v, \mathcal{A}w) = (v, w) \qquad \forall v, w \in V.$$

Действительно, импликация "только тогда"очевидна, а "тогда"следует из того, что скалярное произведение можно восстановить по норме.

Кроме того, унитарные операторы всегда невырождены, т.к. они не имеют ядра (в противном случае мы получили бы, что $||\mathcal{A}v|| = 0$ при ненулевом векторе $v \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$). Далее, произведение двух унитарных операторов и обратный к унитарному оператору снова унитарны. Поэтому унитарные операторы образуют группу, которая обозначается через $\mathrm{U}(V)$ и называется *унитарной группой.*

**Предложение 8.6.** *Унитарные операторы — это в точности операторы, удовлетворяющие условию $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^*$.*

*Доказательство.* Пусть $u, v \in V$ — произвольные векторы. Тогда

$$(u, v) = (\mathcal{A}u, \mathcal{A}v) = (\mathcal{A}^*\mathcal{A}u, v).$$

Поэтому $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{E}$, что равносильно тому, что $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^*$. □

Множество матриц, удовлетворяющих условию $A^{-1} = A^*$, образует подгруппу в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, которая обозначается через $\mathrm{U}_n$ и тоже называется унитарной группой.

**Упражнение 8.7** (для тех, кто знает, что такое гладкое многообразие)**.** Докажите, что $\mathrm{U}_n$ является *вещественным* гладким многообразием размерности $n^2$ в $2n^2$-мерном пространстве $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$.

**Пример 8.8.** $U_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid z^{-1} = \overline{z}\}$ есть единичная окружность в $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$.

8.5. **Диагонализуемость и собственные значения.**

**Теорема 8.9.** *Пусть $\mathcal{A}$ — оператор одного из трех типов: эрмитов, косоэрмитов или унитарный. Тогда*

(1) *Если подпространство $U \subset V$ является $\mathcal{A}$-инвариантным, то $U^\perp$ тоже $\mathcal{A}$-инвариантно.*
(2) *Оператор $\mathcal{A}$ диагонализуем в ортонормированном базисе.*
(3) *Если $\mathcal{A}$ эрмитов (соотв. косоэрмитов, унитарен), то все его собственные значения вещественны (соотв. чисто мнимые, равны по модулю 1).*

*Доказательство.* (1) доказывается примерно одинаково во всех трех случаях. Проведем самое сложное из трех рассуждений, для унитарного оператора $\mathcal{A}$.

Итак, докажем, что $\mathcal{A}U^\perp \subset U^\perp$. Возьмем произвольный вектор $w \in U^\perp$ и докажем, что $\mathcal{A}w \in U^\perp$, то есть что $(\mathcal{A}w, u) = 0$ для любого $u \in U$. Оператор $\mathcal{A}$, ограниченный на $U$, также будет унитарным, а следовательно, невырожденным. Стало быть, вектор $\widetilde{u} = \mathcal{A}u \in U$ отличен от нуля. Векторы $\widetilde{u}$ и $w$ ортогональны. Поэтому

$$0 = (w, \widetilde{u}) = (\mathcal{A}w, \mathcal{A}\widetilde{u}) = (\mathcal{A}w, \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}u) = (\mathcal{A}w, u).$$

(во втором равенстве мы воспользовались ортогональностью $\mathcal{A}$). Поэтому $\mathcal{A}w \in U^{\perp}$, что и требовалось доказать. Случай эрмитова и косоэрмитова операторов разбираются аналогично (проделайте это сами).

(2) доказывается по индукции. При $\dim V = 1$ доказывать нечего. Докажем индуктивный переход: пусть $\dim V = n$. Поскольку $\mathcal{A}$ — оператор на комплексном векторном пространстве, у него есть собственный вектор $v \in V$. Будем считать, что $\|v\| = 1$. Тогда подпространство $U = \langle v \rangle^{\perp}$ тоже $\mathcal{A}$-инвариантно в силу пункта (1). Поэтому, согласно предположению индукции, в $U$ существует ортонормированный базис $u_1, \dots, u_{n-1}$, в котором $\mathcal{A}$ диагонален. Но тогда $\mathcal{A}$ диагонален в базисе $u_1, \dots, u_{n-1}, v$ пространства $V$.

Докажем (3) это для эрмитова оператора. Пусть $\mathcal{A}v = \lambda v$. Тогда $\lambda(v, v) = (v, \lambda v = (v, \mathcal{A}v) = (\mathcal{A}v, v) = (\lambda v, v) = \overline{\lambda}(v, v)$, откуда $\lambda = \overline{\lambda} \in \mathbb{R}$. Случаи унитарного и косоэрмитова операторов разбираются аналогично. □

8.6. **Полярное разложение.**

**Определение 8.10.** Эрмитов оператор $\mathcal{A}$ называется положительно определенным, если все его собственные значения больше нуля.

**Предложение 8.11** (об извлечении корня из положительно определенного эрмитова оператора)**.** *Пусть $\mathcal{A}$ — положительно определенный эрмитов оператор. Тогда существует единственный положительно определенный эрмитов оператор $\mathcal{B}$, для которого $\mathcal{A} = \mathcal{B}^2$.*

*Доказательство.* Существование: пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ — различные собственные значения $\mathcal{A}$, $V_1, \dots, V_k$ — соответствующие им собственные подпространства (т.е. $\mathcal{A}|_{V_i} = \lambda_i \mathcal{E}$). Пусть $\mu_i = \sqrt{\lambda_i} > 0$. Определим оператор $\mathcal{B}$, действующий на каждом из $V_i$ умножением на $\mu_i$. Ясно, что $\mathcal{B}^2 = \mathcal{A}$.

Докажем единственность. Пусть $\mathcal{B}$ — искомый оператор. Он диагонализуем; пусть $W_i$ — его собственные подпространства, отвечающие собственным значениям $\mu_i$. Тогда пространства $W_i$ будут собственными и для оператора $\mathcal{A} = \mathcal{B}^2$, который будет действовать на каждом из $W_i$ умножением на $\mu_i^2$. Отсюда следует, что набор $W_i$ получается из набора $V_i$ подходящей перенумерацией, т.е. $\mathcal{B}$ определен однозначно. □

**Лемма 8.12.** *Пусть $\mathcal{A}$ — произвольный невырожденный оператор. Тогда оператор $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ — положительно определенный эрмитов.*

*Доказательство.* Эрмитовость очевидна: $(\mathcal{A}\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}^{**}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}\mathcal{A}*$. Для доказательства положительной определенности заметим, что если $v \in V$ — собственный вектор $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$, отвечающий собственному значению $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lambda = (\lambda v, v)/(v,v) = (\mathcal{A}\mathcal{A}^* v, v)/(v,v) = (\mathcal{A}^* v, \mathcal{A}^* v)/(v,v) = \|\mathcal{A}^* v\|^2/\|v\|^2 > 0.$$

□

Сформулируем и докажем теорему о полярном разложении оператора, которая является аналогом представления комплексного числа в тригонометрической форме: $z = re^{i\varphi}$, где $r > 0$, $e^{i\varphi} = 1$.

**Теорема 8.13** (о полярном разложении)**.** *Всякий невырожденный линейный оператор $\mathcal{A}$ можно представить в виде $\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{C}$, где $\mathcal{B}$ — положительно определенный эрмитов оператор, $\mathcal{C}$ — унитарный оператор, причем это представление единственно.*

*Доказательство.* Сначала докажем единственность: что если такое представление существует, то $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ определены однозначно. Итак, пусть $\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{C}$, где $\mathcal{B} = \mathcal{B}^*$, а $\mathcal{C}\mathcal{C}^* = \mathcal{E}$. Тогда по предыдущей лемме оператор $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{C}^*\mathcal{B}^* = \mathcal{B}\mathcal{B}^* = \mathcal{B}^2$ — положительно определенный эрмитов. Значит, из него в силу предложения 8.11 единственным образом извлекается корень, т.е. оператор $\mathcal{B}$ определен однозначно. Но тогда и $\mathcal{C}$ определен однозначно, т.к. $\mathcal{C} = \mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}$.

Докажем существование. Рассмотрим положительно определенный эрмитов оператор $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$. Из него извлекается корень: пусть $\mathcal{B}$ таков, что $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{B}^2$. Тогда положим $\mathcal{C} = \mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}$. Тогда $\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{C}$, а $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{C}^*\mathcal{B} = \mathcal{B}^2$, откуда $\mathcal{C}\mathcal{C}^* = \mathcal{E}$. Стало быть, $\mathcal{C}$ унитарен. Теорема доказана. □

*E-mail address*: `esmirnov@hse.ru`