7. Седьмая лекция, 26 февраля 2014 г.

7.1. **Эрмитово пространство.** Если же пространство V комплексное, то, как легко видеть, на V не бывает положительно определенных билинейных форм. Действительно, пусть задана такая форма, для которой $(v, v) > 0$ при $v \neq 0$. Тогда $(iv, iv) = i^2(v, v) = -(v, v) < 0$ — противоречие. Поэтому для введения нормы на комплексном векторном пространстве применяются *полуторалинейные* формы.

7.2. **Полуторалинейные формы.**

Определение 7.1. Пусть V — комплексное векторное пространство. Отображение $\alpha\colon V \times V \to \mathbb{C}$ называется *полуторалинейной формой* на V, если:

- оно линейно по второму аргументу: $\alpha(v, w + w') = \alpha(v, w) + \alpha(v, w')$; $\alpha(v, \lambda w) = \lambda \cdot \alpha(v, w)$;
- оно *антилинейно* по первому аргументу: $\alpha(v+v', w) = \alpha(v', w)+ \alpha(v, w)$; $\alpha(\lambda v, w) = \overline{\lambda} \cdot \alpha(v, w)$.

В конечномерном случае полуторалинейную форму можно задать матрицей: пусть $e_1, \dots, e_n$ — некоторый базис пространства V. Пусть $A = (a_{ij})$, где $a_{ij} = \alpha(e_i, e_j)$. Тогда если $v = \sum x_i e_i$, $w = \sum y_j e_j$, то

$$\alpha(v, w) = \sum_{i,j} a_{ij}\overline{x_i} y_j.$$

7.3. **Эрмитовы формы.** Наша следующая задача — выяснить, что будет аналогом *симметрической* билинейной формы. Ее определение тоже оказывается нужно “подправить". Так, например, у полуторалинейной формы нельзя просто поменять местами аргументы: по нашему определению форма $\tilde{\alpha}(v, w) := \alpha(w, v)$ уже не будет полуторалинейной формой, т.к. она будет линейна по *первому* аргументу и антилинейна по *второму*. Чтобы получить полуторалинейную форму, результат надо еще сопрячь.

Определение 7.2. Полуторалинейная форма называется *эрмитовой*, если $\alpha(v, w) = \overline{\alpha(w, v)}$.

Отсюда, в частности, следует, что для эрмитовой формы $\alpha(v, v) = \overline{\alpha(v, v)} \in \mathbb{R}$. А вещественные числа уже бывают положительными или отрицательными. Поэтому возникает следующее

Определение 7.3. Эрмитова форма α называется *положительно определенной*, если $\alpha(v, v) > 0$ при $v \neq 0$. Пространство, снабженное положительно определенной эрмитовой формой, называется *эрмитовым* (или *унитарным*).

Пример 7.4. На $\mathbb{C}^n$ существует каноническая положительно определенная эрмитова форма

$$(x, y) = \overline{x_1} y_1 + \dots + \overline{x_n} y_n.$$

Пример 7.5. Рассмотрим пространство интегрируемых *комплекснозначных* функций на отрезке $[0,1]$ (или каком-нибудь еще множестве). На этом пространстве существует положительно определенная эрмитова форма, определенная по правилу

$$(f,g)=\int_0^1 \overline{f(x)}g(x)dx.$$

Упражнение 7.6. Проверьте, что в эрмитовом случае из любого базиса можно сделать ортонормированный при помощи верхнетреугольной замены (ортогонализация Грама–Шмидта).

7.4. **Норма на эрмитовом пространстве.** Пусть V — эрмитово пространство Введем на V норму по правилу $\|v\|=(v,v)^{1/2}\in\mathbb{R}_+$.

Упражнение 7.7. Докажите, что это действительно норма (в частности, для нее имеет место неравенство Коши–Буняковского–Шварца).

Как и в евклидовом случае, по норме можно восстановить скалярное произведение. Действительно, из равенств

$\|v+w\|^2=\|v\|^2+\|w\|^2+2\operatorname{Re}(v,w)$ и $\|v+iw\|^2=\|v\|^2+\|w\|^2-2i\operatorname{Im}(v,w)$

следует, что

$$(v,w)=\frac{1}{2}\left[\|v+w|^2-|v+iw\|^2\right]$$

(проверьте это!).