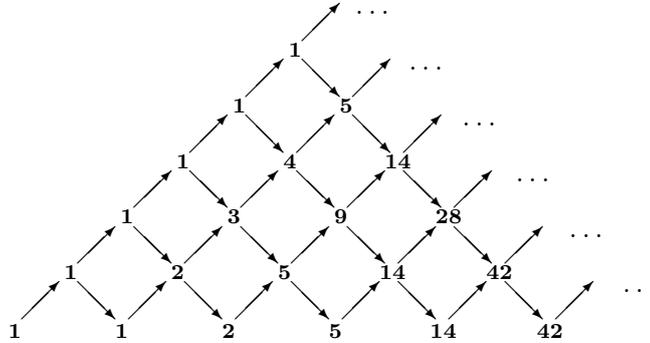


Дискретная математика

Семинар 10

ВШЭ, факультет математики
первый курс, четвёртый модуль

1. Треугольником Дика состоит из чисел $n_{i,j}$, $0 \leq i \leq j$, таких что $n_{i,j}$ равно числу путей Дика из точки $(0,0)$ в точку (i,j) . В частности, $n_{i,j} \neq 0$ только если $i + j$ чётно.



- а). Постройте производящие функции для последовательностей чисел, стоящих в 1-м и 2-м снизу горизонтальных рядах треугольника Дика.
- б). Постройте производящие функции для последовательностей чисел, стоящих в 3-м снизу горизонтальном ряду треугольника Дика.
- в). Постройте производящие функции для последовательностей чисел, стоящих в k -м снизу горизонтальном ряду треугольника Дика.
- г)*. Вычислите $N(x, y) = \sum_{i,j \geq 0} x^i y^j n_{i,j}$.

2. Непрерывные ломаные, составленные из векторов $(1, 1)$ и $(1, -2)$, начинающиеся в начале координат $(0, 0)$, заканчивающиеся на оси абсцисс в точке $(n, 0)$ и лежащие целиком в верхней полуплоскости, будем называть косыми путями Дика. Абсцисса n конечной точки пути называется его длиной. Обозначим через k_n число косых путей Дика длины n : $k_0 = 1$, $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = 1$, $k_4 = k_5 = 0$, $k_6 = 3$, ... Найдите уравнение, задающее производящую функцию $K(s) = \sum_{n \geq 0} k_n s^n$ для косых путей Дика.

3. Пути Моцкина определяются так же, как и пути Дика, только они могут включать в себя горизонтальные векторы $(1, 0)$. Среди всех путей Моцкина выделим подмножество путей, не содержащих горизонтальных векторов в самом нижнем ряду. Числа таких путей, состоящих из n векторов образуют последовательность μ_n : $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1$, $\mu_3 = 1$, $\mu_4 = 3$, $\mu_5 = 6$ и т.д. Найдите производящую функцию для этой последовательности.

4. Решите задачу 1 для треугольника Моцкина

