Листок 5. Уравнение теплопроводности

УРЧП, 3-4 курс, **3.04.2014**

5⋄1 Постройте функцию Грина оператора $L = -\frac{d^2}{dx^2}$ с граничными условиями $u(0) = u(l) = 0$.

5⋄2 Постройте функцию Грина оператора $L = -\frac{d^2}{dx^2} + 1$ с граничными условиями $u'(0) = u'(l) = 0$.

5⋄3 Решите задачу Коши:
а) $u_t = u_{xx} + 3t^2$, $u|_{t=0} = \sin x$;
б) $u_t = u_{xx} + u_{yy} + e^t$, $u|_{t=0} = \cos x \cdot \sin y$.

5⋄4 При каких условиях на функцию $\varphi \in C_0^\infty((0,1))$ любое решение $u(x,t)$ в полуполосе $Q_{(0,1)}^\infty$ задачи
а) $u_t = u_{xx}$, $u|_{x=0} = u_x|_{x=1} = 0$, $u|_{t=0} = \varphi(x)$;
б) $u_t = u_{xx}$, $u_x|_{x=0} = u_x|_{x=1} = 0$, $t|_{t=0} = \varphi(x)$
обладает свойством $u(x,t) \to 0$ при $t \to +\infty$?

5⋄5 Пусть

$$u_t = u_{xx} + \alpha u, \qquad u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad u(x,0) = \varphi(x).$$

Найдите все такие $\alpha \in \mathbb{R}$, что для любой начальной функции $\varphi \in C([0,1])$, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, выполнено

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = 0, \qquad \forall x \in [0,1].$$

5⋄6 Пусть функция $u(x,t)$ – решение задачи

$$u_t = u_{xx}, \qquad u_x(0,t) = u_x(2,t) = 3, \qquad u(0,x) = x^3 - 3x^2 + 3x$$

при $0 \leqslant x \leqslant 2$, $t \geqslant 0$. Найдите $\lim_{t\to+\infty} u(x,t)$.

5⋄7 Докажите теоремы о стабилизации:
Пусть $u(x,t)$ — ограниченное решение задачи Коши

$$u_t = u_{xx}, \quad u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

а $\varphi(x)$ — ограниченная непрерывная функция. Тогда

1. Если $\lim_{x\to\pm\infty} \varphi(x) = A_\pm$, то $\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = \frac{A_+ + A_-}{2}$.

2. Если $\lim_{l\to+\infty} \int_{-l}^{l} \varphi(x)dx = A$, то $\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = \frac{A}{2}$.

3. Если $\varphi(x)$ — периодическая функция, то $\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = \varphi_0$, где φ_0 — нулевой коэффициент разложения функции $\varphi(x)$ в ряд Фурье, пространственное среднее.

5◇8 Применяя интегральное преобразование Фурье, решите краевую задачу

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x, t < +\infty, \\ u_x(0,t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \\ u(x,0) = \varphi(x), 0 < x < +\infty. \end{cases}$$

5◇9 Пусть функция $u(x,t,t_0)$ принадлежит классу C^2 при $x \in \mathbb{R}^n$, $t > t_0 > 0$. Докажите, что функция $u(x,t,t_0)$ при каждом $t_0 > 0$ является решением задачи Коши

$$u_t = a^2 \Delta u, \qquad u|_{t=0} = f(x,t_0)$$

тогда и только тогда, когда функция

$$v(x,t,t_0) = \int_{t_0}^{t} u(x,t,\tau) d\tau$$

при каждом $t_0 \geqslant 0$ является решением задачи Коши

$$v_t = a^2 \Delta u + f(x,t), \qquad u|_{t=0} = 0.$$

5◇10 Дан тонкий однородный полуограниченный стержень $(0 \leqslant x < \infty)$, боковая поверхность которого теплоизолирована. Найдите распределение температуры $u(x,t)$ в стержне, если конец стержня поддерживается при постоянной температуре $u|_{x=0} = 3$, а начальная температура $u|_{t=0} = 3e^{-x}$.