Задачи для семинара 2

Решения некоторых задач (по выбору преподавателей и студентов) обсуждаются на семинарах. Остальные задачи рекомендуется решать дома для лучшего понимания лекций.

2.1. Найдите все разложения абелевой группы $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ в прямую сумму двух циклических подгрупп.

2.2. Найдите число элементов порядка 9 в группе $\mathbb{Z}/324\mathbb{Z}$.

2.3. Вычислите группы $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ и $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$.

2.4. Вычислите группу $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/120\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/180\mathbb{Z})$.

2.5. Пусть $d_A(n)$ — количество элементов, аннулируемых умножением на n, в абелевой группе A.

а) Докажите, что если группа A конечна и при этом $d_A(n) \leqslant n$, то A циклическая.

б*) Пусть $d_A = d_B$ для конечных абелевых групп A и B. Верно ли, что группы A и B изоморфны?

2.6. а) Пусть $K^\times$ — группа ненулевых элементов поля K (по умножению). Может ли она содержать конечную нециклическую подгруппу?

б) Верно ли, что мультипликативная группа конечного поля всегда циклична?

2.7. Абелева группа A содержит в качестве подгруппы $\mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$, а факторгруппа изоморфна $\mathbb{Z}/2q\mathbb{Z}$ (числа p и q простые). Чему может быть изоморфна группа A?

2.8. Пусть G — конечная абелева группа, p — простое число. *Подгруппой p-кручения* называется множество всех элементов группы G, аннулируемых умножением на некоторую степень числа p (убедитесь, что это действительно подгруппа). Докажите, что G будет циклической тогда и только тогда, когда все её подгруппы p-кручения являются циклическими.

2.9*. Разложите группу обратимых элементов кольца $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, где m произвольно, в прямую сумму циклических.