Дискретная математика
Листок 5

ВШЭ, факультет математики
первый курс, четвёртый модуль

Листок можно сдавать до 24.04.2014.

1. Многочлен Чебышева T_n определяется формулой $\cos(n\varphi) = T_n(cos\varphi)$. Найдите выражение для производящей функции $\sum_{n\geq 0} T_n(x)t^n$ в виде рациональной функции от x и t.

2. Докажите, что n-й многочлен Чебышева $y = T_n(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0.$$

3. Экспоненциальные производящие функции для целочисленных последовательностей называются функциями Гурвица. Докажите, что результат подстановки функции Гурвица в функцию Гурвица является функцией Гурвица.

4. Вычислите производящую функцию от двух переменных для треугольника Моцкина.

5. Вычислите треугольник Бернулли—Эйлера по модулю 2.

Введём обозначения:

α_k – кратность восходящего ребра между строками с номерами k и k+1,

β_k – кратность нисходящего ребра между строками с номерами k+1 и k,

γ_k – кратность горизонтального ребра в k-ой строке.

Докажите, что следующие распределения кратностей по рёбрам в треугольниках Дика и Моцкина приводят к указанным последовательностям в их основаниях и найдите дифференциальные уравнения на производящие функции от двух переменных для каждого из этих треугольников:

6. Если $\alpha_k = k$, $\beta_k = k+1$, то в основании треугольника Дика стоят числа Бернулли из треугольника Бернулли-Эйлера.

7. Если $\alpha_k = 1$, $\beta_k = k$, то в основании треугольника Дика стоят числа факториалы нечетных чисел, $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot (2n-1)$.

8. Если $\alpha_k = \gamma_k = 1$, $\beta_k = k$, то в основании треугольника Моцкина стоят числа I_n – число инволюций (перестановок, квадрат которых есть тождественная перестановка) на множестве из n элементов, $I_1 = 1$, $I_2 = 2$, $I_3 = 4$, $I_4 = 10$.

9. Если $\alpha_k = \beta_k = k$, $\gamma_k = 2k-1$, то в основании треугольника Моцкина стоят числа $n!$

10. Если $\alpha_k = k$, $\beta_k = k+1$, $\gamma_k = 2k$, то в основании треугольника Моцкина стоят числа $(n+1)!$